Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. A. Griewank Ph.D.; Dipl.Math. T.Bosse

Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik für Informatiker (WS 13/14) Serie 1

Abgabe bis 07.11.2013

Aufgabe 1.1: (10 Punkte)

Betrachten Sie die Riemannsche Zeta-Funktion

$$\zeta(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} k^{-x} \text{ für } x > 1.$$

Diese kann durch die endlichen Partialsummen

$$\zeta_n(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} k^{-x}$$

näherungsweise ausgewertet werden.

1. Schreiben Sie ein Programm, welches die Reihe $\zeta(2)$ durch die Vorwärtssummation

   $$\zeta(2) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

   in einfacher Gleitkommaarithmetik berechnet. Brechen Sie die Summation bei der kleinsten natürlichen Zahl $\tilde{n}$ ab, bei welcher

   $$\mathrm{fl}(\zeta_{\tilde{n}+1}(2)) = \mathrm{fl}(\zeta_{\tilde{n}}(2)),$$

   gilt. Nutzen Sie das gleiche $\tilde{n}$ um die Rückwärtssumme

   $$\frac{1}{\tilde{n}^2} + \dots + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{1^2}$$

   zu bestimmen.

2. Bestimmen Sie analog zu der ersten Teilaufgabe die Vorwärtssumme und Rückwärtssumme der alternierenden Reihe

   $$\zeta(2) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} a_j, \text{ mit } a_j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(j \cdot 2^k)^2}.$$

   Bei der Rückwärtssummation sollen die entsprechenden Summanden a_j auch rückwärts berechnet werden. Nutzen Sie dazu - in beiden Fällen, d.h. für die alternierende Summe und die Bestimmung der einzelnen Summanden - die entsprechenden kleinsten natürlichen Zahlen $\tilde{n}$ und $\tilde{n}_j$, ab welchen sich die Summen in der Vorwärtssummation nicht mehr ändern.

Wiederholen Sie das Experiment mit doppelter Gleitkommaarithmetik und erklären Sie die unterschiedlichen Rechenzeiten.

Aufgabe 1.2: (10 Punkte)

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ und den Vektor } b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Schreiben Sie zwei Methoden zum Lösen des Gleichungssystems $Ax = b$, welche A, b erhalten und $x \in \mathbb{R}^3$ berechnen. Verwenden Sie dazu die Cramersche Regel und Gauss mit Pivoting. Lassen Sie sich die 'wichtigsten' Zwischenschritte ausgeben und dokumentieren Sie diese - inklusive Lösung.

Aufgabe 1.3: (10 Punkte)

Schreiben Sie zwei Bisektionsverfahren in doppelter Genauigkeit um eine Nullstelle $x_* \in \mathbb{R}$, so dass $f(x_*) = 0$, der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = 0.5x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 50x - 37.5$$

in dem Intervall $[a_0, b_0] = [-2, 4]$ zu bestimmen. Teilen Sie dazu in der i-ten Iteration das Interval $[a_i, b_i]$

1. in zwei gleiche Teile auf, das heisst $c_i = \frac{a_i+b_i}{2}$, bzw.
2. in zwei Teile s und t auf, die dem goldenen Schnitt $\frac{s+t}{t} = \frac{s}{t}$, entsprechen.

Wählen Sie als Abbruchkriterium $|a_i - b_i| < tol$ mit $tol \in \{10^{-4}, 10^{-8}, 10^{-16}\}$ und bestimmen Sie jeweilige Zahl der benötigten Iterationen. Visualisieren Sie die Funktion und die Iterierten der beiden Verfahren, sowie den absoluten Fehler zu der Nullstelle x_*.

Aufgabe 1.4: (10 Punkte)

Bestimmen den Wert der analytische Ableitung $f'(x)$ von der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \frac{x^2}{\sin(x)}$$

an dem Punkt $x = 1$. Vergleichen Sie den Ableitungswert mit dem Differenzenquotient

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

für verschiedene Werte von h. Das heisst, visualisieren Sie den Fehler

$$E_{f,x}(h) = \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right|$$

als Funktion von h in einfacher und doppelter Gleitkommaarithmetik für Werte $h = 10^{-k}$ mit $k = 1, \ldots, 15$. Benutzen Sie sowohl für h als auch den Fehler eine logarithmisch Skalierung und erklären Sie das auftretende 'V-Phänomen'.

Weitere Anforderungen an die Lösungen der Aufgaben sind:

1. Erstellen Sie für alle Aufgaben eine ausführliche schriftiche Ausarbeitung im PDF Format mit ihren Ergebnissen und Beobachtungen.

2. Nutzen Sie Formeln, Grafiken und Tabellen um ihre Ergebnisse geeignet zu präsentieren.

3. Die Abgabe der Ausarbeitung und der entsprechenden Programme geschieht gruppenweise in elektronisch Form als EINE gepackte Datei pro Serie.

4. Achten Sie darauf, dass in allen Unterlagen Ihr Name/Immat.Nr.+Email festgehalten ist.

5. Dokumentieren Sie die notwendigen Schritte zum Ausführen Ihrer Programme in einer README-Datei.

6. Achten Sie darauf, dass sich Quellcode (JAVA, C/C++, Fortran F95) fehlerfrei kompilieren lässt und (möglichst) einfach strukturiert ist -

Fehlerhafter/Unvollständiger Code wird nicht bewertet!