Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. A.Griewank Ph.D., Dipl.Math. T.Bosse

Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik für Informatiker (WS1314) Serie 2

Abgabe bis 21.11.2013 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 2.1: (10 Punkte)

Mitch B. gerät bei einer Schwimmübung in einen Strudel. Dabei beobachtet er, dass sich seine Position $(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$ zu jeder vollen Stunde k nach der Vorschrift

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} y_k \\ -\frac{3}{4} x_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

ändert. Angenommen Mitch befindet sich momentan an dem Punkt $(x_0, y_0) = (4, 2)$.

1. Bestimmen Sie die folgenden Positionen (x_k, y_k) für $k = 1, \ldots, 10$ und notieren Sie diese in einer Liste. (Optional: Visualisierung)
2. Zeigen Sie, dass die gegebene Abbildung die Voraussetzung für den Banachschen Fixpunktsatz auf ganz $\mathbb{R}^2$ bezüglich der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ erfüllt. Gilt das auch für die Summennorm $\|\cdot\|_1$? (mit Begründung)
3. Bestimmen Sie (theoretisch und praktisch) den Fixpunkt der Abbildung.

Aufgabe 2.2: (10 Punkte)

Lukas P. tritt einen Freistoss. Die Entfernung zum Tor wird durch $w_* = w(t_*)$ bezeichnet (Weite zum Zeitpunkt $t = t_*$ des Überfliegens der Torlinie). Der Fussball fliegt durch den Tritt mit der Anfangsgeschwindigkeit v und im Winkel $\delta > 0$ vom Freistosspunkt weg.
Daraus ergibt sich zum Zeitpunkt $t = 0$ die initiale vertikale Geschwindigkeit (in die **H**öhe) sowie die initiale horizontale Geschwindigkeit (in die **W**eite) als

$$\dot{h}(0) = \dot{h}_0 = v \cdot \sin\delta \quad \text{bzw.} \quad \dot{w}(0) = \dot{w}_0 = v \cdot \cos\delta.$$

Betrachtet man die vertikale Bewegung ohne Luftwiderstand, dann erhält man in Abhängigkeit von der Flugzeit $t > 0$ als momentane Flughöhe $h = h(t)$ des Balls

$$h(t) = \dot{h}_0 \cdot t - t^2 \cdot \frac{g}{2}$$

mit der Fallbeschleunigung $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$. Für die deutlich schnellere horizontale Bewegung ergibt sich unter Berücksichtigung der Luftreibung für die Entfernung $w = w(t)$ des Balls vom Abschusspunkt

$$w(t) = \frac{1}{c} \ln(1 + \dot{w}_0 \cdot c \cdot t)$$

mit dem Widerstandswert $c = 0.05$.
In der Zeit bis zum Wiederanpfiff des Spiels legt der den Freistoss ausführende Spieler als erstes die Position fest, an der der Ball die Torlinie überschreiten soll. Der Spieler ermittelt danach die Entfernung $w_* = 25$m vom Freistosspunkt zur anvisierten Stelle auf der Torlinie, legt die an dieser Stelle gewünschte Ballhöhe $h_* = 2$m sowie den Eintrittswinkel $\delta_* = -\tan(30) = -1/\sqrt{3}$ fest und löst das folgende Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{rcccl}
h(t_*, \dot h_0, \dot w_0) & = & h_* & = & \dot h_0 \cdot t_* - {t_*}^2 \cdot \frac{g}{2} \\
w(t_*, \dot h_0, \dot w_0) & = & w_* & = & \frac{1}{c} \ln(1 + \dot w_0 \cdot c \cdot t_*) \\
\frac{\dot h(t_*, \dot h_0, \dot w_0)}{\dot w(t_*, \dot h_0, \dot w_0)} & = & \tan\delta_* & = & (\dot h_0 - t_* \cdot g) \cdot (\frac{1}{\dot w_0} + c \cdot t_*)
\end{array}
$$

nach t_*, $\dot h_0$ und $\dot w_0$ mit dem Newton-Verfahren. Als Startpunkt des Newton-Verfahrens wählte er den Punkt $(t, \dot h_0, \dot w_0) = (t^{(0)}, \dot h_0^{(k)}, \dot w_0^{(k)}) = (1, 1, 12.5)$. Aus der Lösung des Gleichungssystems kann der Spieler dann sehr einfach die für den korrekten Abschuss notwendigen Werte v und δ berechnen. Wiederholen Sie seine Berechnung. Erstelle eine Tabelle, in der für jeden Schritt $k = 1, 2, \ldots$ des Newtonverfahrens neben der aktuellen Iterierten $x^{(k)} = (t^{(k)}, \dot h_0^{(k)}, \dot w_0^{(k)})$ auch das Residuum

$$
F(x^{(k)}) = \begin{bmatrix} \dot h_0^{(k)} \cdot t^{(k)} - \frac{1}{2} {t^{(k)}}^2 \cdot g & - & h_* \\ \frac{1}{c} \ln(1 + \dot w_0^{(k)} \cdot c \cdot t^{(k)}) & - & w_* \\ \left(\dot h_0^{(k)} - t^{(k)} \cdot g\right) \cdot \left(\frac{1}{\dot w_0^{(k)}} + c \cdot t^{(k)}\right) & - & \tan\delta_* \end{bmatrix}
$$

angegeben wird. Vergessen Sie nicht die Bestimmung der Lösung (v, δ) !

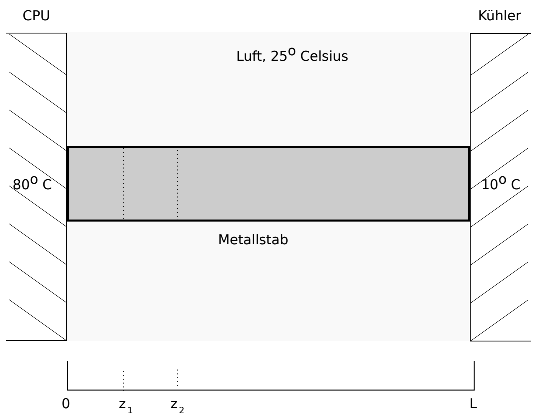
Aufgabe 2.3: (10 Punkte)

Tim C. ist mit der Entwicklung eines neuen Computers beschäftigt. Besonders interessiert ihn die Wärmeentwicklung an dem Kühler des Prozessors. Unter Volllast hat die CPU eine Temperatur von 80° Celsius. Der Prozessor wird von einem Aggregat gekühlt, welches konstant $10°C$ hat und über eine Metallleiste der Länge $L = 1.0m$ mit der CPU verbunden ist. Die Umgebungsluft der Metallleiste hat eine Zimmertemperatur von $x_* = 20°C$.

Helfen Sie Tim bei der Modellierung der Temperaturverteilung in der Leiste. Betrachten Sie dazu das 1-dimensionale Modell der stationären Wärmegleichung mit Randwerten gegeben durch:

$$
-\frac{d^2x(z)}{dz^2} = -q(z), \quad x(0) = 80\ , x(L) = 10
$$

Hierbei, beschreibe $x(z) \in \mathbb{R}$ die Temperatur der Leiste und $q(z) = \gamma(x(z) - x_*) \in \mathbb{R}$ den Wärmeaustausch zwischen der Leiste und der umgebenden Luft an der Position $z \in [0, L]$. Der Übergangskoeffizient is durch $\gamma = 25m^{-2}$ gegeben.



Benutzen Sie eine äquidistante Diskretisierung mit $n+1$ Stützstellen $z_0 = 0, z_1, \ldots, z_n = L$ und formulieren Sie das Finite-Differenzen-Modell, das heisst approximieren Sie

$$
\frac{d^2x(z)}{dz^2} \approx \frac{1}{h^2} \left(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}\right), \quad i = 1, \ldots, n-1.
$$

wobei $x_i = x(z_i)$ und $z_i = z_{i-1} + h$ mit Schrittweite $h = 1/n$.
Formulieren das lineare Gleichungssystem mit den Randwerten und lösen Sie das entstehende tridiagonale System für $n = 5, 10, 20, 100$ mit der Methode aus der Vorlesung. Visualisieren Sie ihre Lösungen.

Aufgabe 2.4: (10 Punkte)

Die Menge der doppelt genauen Gleitkommazahlen G mit den darauf nach IEEE definierten Operationen ist kein Körper, weil es Nullteiler gibt, da $fl(x * x) = 0$ für hinreichend grosse Gleitkommazahlen x gilt. Wir könnnen G aber zu einem metrischen Raum machen, in dem wir die nicht-negative Abstandsfunktion

$$d(z, y) = abs(y - z)$$

definieren. Wir könnnen davon ausgehen, dass dies eine Metrik ist, das heisst, es gilt in IEEE Arithmetik die Definitheit und Dreiecksungleichung

$$d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y \text{ und } d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Entsprechend können wir auf G^n, der Menge der n-Tupel von Gleitkommazahlen in doppelter Genauigkeit, die folgenden nicht-negativen Abbildungen in Gleitkommaarithmetik definieren:

$$d_\infty(x, y) = \max_{i=1\ldots n} d(x_i, y_i) \quad \text{ und } \quad d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} d(x_i, y_i) \text{ für } x, y \in G^n.$$

1. Zeigen Sie, dass beide Abbildungen d_1 und d_∞ die Metrikeigenschaften Definitheit und Dreiecksungeleichung erfüllen.

2. Zeigen oder widerlegen Sie für jeden der beiden Fälle $d_p \in \{d_1, d_\infty\}$, ob G^n bezüglich d_p ein vollständiger metrischer Raum ist, d.h. für jede Cauchyfolge $x^{(k)} \subset G^n$ existiert ein Grenzwert in G^n. *Erinnerung:* Eine Folge heisst Cauchy-Folge, falls für jede Zahl $\epsilon > 0$ gibt es ein natürliche Zahl N_ϵ, so dass
$$d_p(x^k, x^m) \leq \epsilon, \text{ falls } k > N_\epsilon \text{ und } m > N_\epsilon$$