HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. A.GRIEWANK PH.D., DIPL.MATH. T.BOSSE

Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik für Informatiker (WS 13/14) Serie 3

Abgabe bis 05.12.2013 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 3.1: (10 Punkte)

(i) Geben Sie die Lösung der Differentialgleichungen mit den gegebenen Startwerten an:

$$x'(t) = 2t + 1, x(0) = 3 \text{ und } x'(t) = 2t - 2x(t) + 5, x(0) = -1$$

(ii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x'(t) = \frac{2x(t) + t - 1}{2x(t) + t + 1}.$$

(iii) Finden Sie mittels der quadratische Substitution $v(t) = x(t)^2 + t - 1$ eine Lösung von

$$x'(t) = \frac{x(t)}{2} + \frac{t}{2x(t)} - \frac{1}{2x(t)}.$$

(iv) Schreiben Sie die Differentialgleichungen

$$3x''(t) = 8x'(t) + 3x(t) \text{ und } x'''(t) - 2t \cdot x'(t) + x(t) = \sin(t)$$

als System von expliziten Differentialgleichungen 1.ter Ordnung.

Aufgabe 3.2: (10 Punkte)

(i) Finden Sie die allgemeine Lösungen der beiden Differentialgleichungen

$$x''(t) = -x'(t) + 6x(t) \text{ und } 0 = \frac{x''(t)}{\sqrt{1 + (x'(t))^2}} - c,\ c \in \mathbb{R}.$$

(ii) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe gegeben durch

$$x''(t) = 2x'(t) - 2x(t) \text{ mit } x(0) = 1,\ x'(0) = 2.$$

Aufgabe 3.3: (10 Punkte)

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe gegeben durch die Differentialgleichung

$$x'(t) = f(x(t), t) = -15x(t), \text{ für } t \in [0, 1] \text{ und Startwert } x(0) = 1$$

mithilfe des expliziten und impliziten Eulerverfahrens, welche durch die Iterationsvorschriften

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + h_i f\,(x(t_i), t_i) \quad \text{bzw.} \quad x(t_{i+1}) = x(t_i) + h_i f\,(x(t_{i+1}), t_{i+1})$$

mit $h_i = t_{i+1} - t_i$ gegeben sind. Wählen Sie dazu eine äquidistante Zerlegung des Zeitintervalls $[0, 1]$ in $n \in \{7, 10, 25, 50, 500\}$ Zeitschritte $t_i = i/n$, $i = 0, \ldots, n$.
Visualisieren Sie neben der analytischen Lösung x_{ana} und den numerischen Lösungen x_{num} der beiden Verfahren auch die entsprechenden Fehler $\|x_{ana} - x_{num}\|_\infty$ in Abhängigkeit von n.

Aufgabe 3.4: (10 Punkte)

Gegeben sei das folgende System von Differentialgleichung über dem Zeitintervall $t \in [0, \infty)$

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -\alpha x_1(t) x_2(t), \\ x_2'(t) &= \alpha x_1(t) x_2(t) - \beta x_2(t), \\ x_3'(t) &= \beta x_2(t). \end{aligned}$$

für gewisse Parameter $\alpha, \beta \in [0, 1]$ und Anfangswerte $x_1(0), x_2(0), x_3(0) \in \mathbb{R}_+$. Diskutieren Sie die Fixpunkte der Trajektorie $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ mit $\lim_{t\to\infty}(x_1'(t), x_2'(t), x_3'(t)) = (0, 0, 0)$, in Abhängigkeit von den Startwerten und der Parameter. Begründen Sie ihre Aussagen und visualisieren Sie die verschiedenen Szenarien für explizite Werte. *Hinweis:* Benutzen Sie zur Berechnung das explizite Eulerverfahren aus Aufgabe 3.3.

WICHTIG: Bitte geben Sie bei (theoretischen) Aufgaben IMMER den Lösungsweg mit an!