Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. A.Griewank Ph.D., Dipl.Math. T.Bosse

Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik für Informatiker (WS1314) Serie 4

Abgabe bis 23.12.2013 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 4.1: (*** Punkte)

Aufgrund einer missverständlichen Formulierung wird die Aufgabe nicht offiziel gewertet. Richtige Aussagen geben jedoch Extra-Punkte. Wir bitten um Entschuldigung.

Aufgabe 4.2: (10 Punkte)

Zeigen Sie mittels einer Picard-Iteration, dass

(i) $y(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$ das Anfangswertproblem $y' = xy$ mit $y(0) = 1$ löst.

(ii) die Funktionen $y(x) = \tan(x)$ das Anfangswertproblem $y' = 1 + y^2$ mit $y(0) = 0$ löst.

Aufgabe 4.3: (10 Punkte)

Betrachten Sie die Differentialgleichung $y' = -c(x, y)y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass für jede Lösung y der Grenzwert verschwindet, d.h. $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$, falls es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt und zwei positive Konstanten $e, E \in \mathbb{R}$ existieren, so dass $Ex \geq c(x, y(x))) \geq ex > 0$ für alle $x \geq x_0$.

Aufgabe 4.4: (10 Punkte)

Ross B. ist an der Optimierung eines neuen Dämpfers für seinen Rennboliden interessiert. Dazu betrachtet er eine Feder der Länge $l = 0.5$ Meter und mit einem Gewicht von $m = 2$ Kilogramm Masse. Um die Feder auf eine Länge von 0.7 auszudehnen, benötigt man eine Kraft von 25.6 Newton. Somit ist die Federkonstante (Kraft/Auslenkung) mit $k = 25.6/0.2 = 128$ gegeben. Die Bewegung folgt dabei:

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0.$$

(i) Bestimmen Sie für den ungedämpften Fall ($c = 0$) die Position des angehängten Gewichts für alle Zeitpunkte $t > 0$, falls das die Anfangsgeschwindigkeit $x'(0) = 0$ beträgt und die Feder auf $x_0 = 0.7$ Meter zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ ausgelenkt wird.

(ii) Angenommen die Feder befindet sich in einer Flüssigkeit mit einer Dämpfungskonstant $c = 40$. Bestimmen Sie die Position des angehängten Gewichts für alle Zeitpunkte $t > 0$, falls das die Anfangsgeschwindigkeit $x'(0) = 0.6m/s$ beträgt und die Feder zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ nicht ausgelenkt ist.

(iii) Berechnen Sie die Dämpfungskonstante der Flüssigkeit genauso, dass kritische Dämpfung eintritt, d.h. das charakteristische Polynom besitzt eine doppelte Nullstelle.

Begründen Sie und visualisieren Sie ihre Ergebnisse.