**Humboldt-Universität zu Berlin**
**Institut für Mathematik**
Prof. A.Griewank Ph.D., Dipl.Math. T.Bosse

# Übungsaufgaben zur Vorlesung
# Mathematik für Informatiker (WS1314)
# Serie 6

Abgabe bis 27.01.2014

---

**Aufgabe 6.1:** (10 Punkte)

Prüfen Sie, ob die Menge $P(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

nicht leer ist. Benutzen Sie hierfür den Simplex-Algoritmus mit Startpunkt $(1, -1, 1)$ zur Lösung des Phase-1 Problems um eine zulässige Ecke in $P(A, b)$ zu bestimmen. Verifizieren Sie ihr Ergebnis ($P(A, b)$ leer oder nicht?) mit einer Zeichnung.

**Aufgabe 6.2:** (10 Punkte)

Betrachten Sie die Funktionen $f_\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ für Parameter $1 \neq \epsilon \in \mathbb{R}$ gegeben als

$$f_\epsilon(x_1, x_2) = x_2^2 - 2x_2x_1^2 + \epsilon x_1^4.$$

Bestimmen Sie die stationären Punkte dieser Funktionen und überprüfen Sie an diesen die Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung. Für welche Werte von $\epsilon$ ist $f$ nach unten beschränkt?

**Aufgabe 6.3:** (10 Punkte)

Gegeben sei ein Vektor von Messpunkten und entsprechenden Messdaten $(t_i, y_i)_{i=1}^n$ (siehe Gaggle). Bestimmen Sie die Koeffizienten $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ der beiden Chebyshev Polynome $T_1(t) = 1$ und $T_2(t) = t$ so, dass die Funktion

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_K \left(x_1T_1(t_i) + x_2T_2(t_i) - y_i\right)/n$$

minimal wird. Hierbei ist die Funktion $\varphi_K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für den Parameter $K \in \mathbb{R}_+$ wie folgt definiert:

$$\varphi_K(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}z^2 & \text{für} |z| \leq K \\ K|z| - \frac{1}{2}K^2 & \text{für} |z| > K \end{cases}.$$

Benutzen Sie die Methode des Steilsten Abstieges aus der Vorlesung (mit Liniensuche), um die Lösung $(x_1^*, x_2^*)$ für $K = 1$ und $K = 5$ zu bestimmen. Benutzen Sie als Anfangswert $x^0 = (-2, 2)$ und als Abbruchkriterium $\|\nabla f(x_1, x_2)\|_2 < 10^{-8}$. Dokumentieren Sie alle wichtigen Zwischenschritte zur Lösung des Problems und visualisiern Sie ihre Resultate.

**Aufgabe 6.4:** (10 Punkte)

Benutzt man beim vereinfachten Newtonverfahren dieselbe Jacobimatrix jeweils $p$-mal, so ergibt sich lokal die Konvergenzordnung $(1+p)$, d.h. die Fehler der Iterierten $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^n$ mit Grenzwert $x^* \in \mathbb{R}^n$ genügen der Ungleichung

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \|x^k - x^*\|^{1+p}, \quad p \in \mathbb{R}_+.$$

Angenommen der Aufwand zur Berechnung der nächsten Iterierten beträgt $c_1 n^3 + pn^2$ mit entsprechender positiven Konstante $c_1 \in \mathbb{R}_+$ und $n \in \mathbb{N}$. So ist ein geeignetes Maß für die Effektivität des Verfahrens nach Ostrowski durch

$$E_{n,c_1}(p) = \frac{\log(1+p)}{c_1 n^3 + pn^2} \tag{1}$$

beschrieben.
Begründen Sie die Existenz einer optimalen Lösung $p_* \in (0, \infty) \subset \mathbb{R}$, welche die Effizienz (1) des Verfahrens maximiert, und finden Sie diese für die feste Wahl der Parameter $c_1 = 1/3$ und $n = 10$. Benutzen Sie hierfür die Methode des Steilsten-Abstieges (mit Liniensuche) aus der Vorlesung, ausgehend von dem Startpunkt $p^0 = 0.1$. Wählen Sie als Abbruchkriterium $\|\nabla E_{n,c_1}(p)\|_2 < 10^{-8}$. Dokumentieren Sie Ihre Lösung und visualisieren Sie Ihre Ergebnisse, d.h. die Funktion selbst, die Norm des Gradienten, die Iterierten mit Funktionswert und die Schrittweite.

*Hinweis:* Die Maximierung von (1) ist äquivalent zur Minimierung von

$$-\tilde{E}_{n,c_1}(p) = -\frac{\log(1+p)}{c_1 n + p}.$$