Übungsaufgaben 1

Vollständigkeit und Separabilität

Aufgabe 1. Man zeige, daß ein metrischer Raum (X, ρ) genau dann vollständig ist, wenn der Durchschnitt jeder abzählbaren Familie $\{F_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ abgeschlossener Kugeln, für die $F_{k+1} \subset F_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ sowie $\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam} F_k = 0$ gilt, aus genau einem Punkt $u \in X$ besteht. ④

Lösung. 1. Seien $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X und die Radien $r_\ell = 2^{-\ell}$ für $\ell \in \mathbb{N}$ definiert. Dann gibt es eine Teilfolge $\{u_{k_\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ von $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\rho(u_{k_\ell+m}, u_{k_\ell}) < r_{\ell+1}$ für alle $\ell, m \in \mathbb{N}$. Für jedes $u \in K(u_{k_{\ell+1}}, r_{\ell+1})$ folgt daraus

$$\rho(u, u_{k_\ell}) \leq \rho(u, u_{k_{\ell+1}}) + \rho(u_{k_{\ell+1}}, u_{k_\ell}) \leq 2r_{\ell+1} = r_\ell,$$

das heißt, $u \in K(u_{k_\ell}, r_\ell)$. Somit gilt $K(u_{k_{\ell+1}}, r_{\ell+1}) \subset K(u_{k_\ell}, r_\ell)$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$.

2. Enthält der Durchschnitt $\cap_{\ell\in\mathbb{N}} K(u_{k_\ell}, r_\ell)$ den Punkt $u \in X$, dann gilt nach der letzten Abschätzung $\rho(u, u_{k_\ell}) \leq r_\ell$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$. Wird $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben und $n \in \mathbb{N}$ derart gewählt, daß $r_\ell < \varepsilon$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \geq n$ gilt, dann ergibt sich aus $\rho(u, u_{k_n}) \leq r_n$ und der Beziehung $\rho(u_{k_n+m}, u_{k_n}) < r_{n+1}$ aus Schritt 1 schließlich

$$\rho(u, u_{k_n+m}) \leq \rho(u, u_{k_n}) + \rho(u_{k_n+m}, u_{k_n}) \leq r_n + r_{n+1} \leq 2\varepsilon \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Somit ist gezeigt, daß die beliebig vorgegebene Cauchy-Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in X gegen einen Grenzwert $u \in X$ konvergiert, woraus sich die Vollständigkeit von (X, ρ) ergibt.

3. Sei (X, ρ) ein vollständiger metrischer Raum und $\{K(u_k, r_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge abgeschlossener Kugeln, für die $K(u_{k+1}, r_{k+1}) \subset K(u_k, r_k)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ sowie $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$ gilt. Sei ferner $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben und $k_0 \in \mathbb{N}$ derart gewählt, daß $r_k < \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$ gilt. Da die Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ der Mittelpunkte die Bedingung $u_\ell \in K(u_k, r_k)$ für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell \geq k$ erfüllt, folgt daraus

$$\rho(u_k, u_\ell) \leq r_k < \varepsilon \quad \text{für alle } k, \ell \in \mathbb{N} \text{ mit } \ell \geq k \geq k_0,$$

das heißt, $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in X. Wegen der Vollständigkeit von X konvergiert diese Folge gegen einen Grenzwert $u \in X$.

Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig fixiert. Da die Restfolge $\{u_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}, \ell\geq k} \subset X$ in der abgeschlossenen Kugel $K(u_k, r_k)$ liegt, gehört ihr Grenzwert $u \in X$ ebenfalls zu $K(u_k, r_k)$. Wegen der Beliebigkeit von $k \in \mathbb{N}$ ergibt sich daraus $u \in \cap_{k\in\mathbb{N}} K(u_k, r_k)$. Außerdem gilt für jeden Punkt $v \in \cap_{k\in\mathbb{N}} K(u_k, r_k)$ die Beziehung

$$\rho(u, v) \leq \rho(u, u_k) + \rho(u_k, v) \leq 2r_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Wegen $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$ folgt daraus $u = v$ und somit $\cap_{k\in\mathbb{N}} K(u_k, r_k) = \{u\}$. □

Aufgabe 2. Sei ℓ^∞ die Menge aller Zahlenfolgen $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$, für die das Supremum $\sup_{\ell\in\mathbb{N}} |x_\ell|$ endlich ist sowie $c \subset \ell^\infty$ die Teilmenge aller konvergenten Zahlenfolgen.

1. Man zeige, daß durch die Definition $\rho(u,v) = \sup_{\ell\in\mathbb{N}} |x_\ell - y_\ell|$ für $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ und $v = \{y_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ ein vollständiger metrischer Raum (ℓ^∞, ρ) entsteht und c ein abgeschlossener Teilraum von ℓ^∞ ist!

2. Man untersuche den metrischen Raum (ℓ^∞, ρ) und seinen Teilraum (c, ρ) auf Separabilität und begründe die Antwort mit einem Beweis oder einem Gegenbeweis! ⑧

Lösung. 1. Für alle Folgen $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$, $v = \{y_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ gilt $\rho(u,v) = \rho(v,u) \geq 0$ sowie $\rho(u,v) = \sup_{\ell\in\mathbb{N}} |x_\ell - y_\ell| = 0$ genau dann, wenn $u = v$ ist. Ist $w = \{z_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ eine weitere Folge, dann ergibt sich für alle $\ell \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$|x_\ell - z_\ell| \leq |x_\ell - y_\ell| + |y_\ell - z_\ell| \leq \sup_{\ell\in\mathbb{N}} |x_\ell - y_\ell| + \sup_{\ell\in\mathbb{N}} |y_\ell - z_\ell|$$

und somit die Dreiecksungleichung $\rho(u,w) = \sup_{\ell\in\mathbb{N}} |x_\ell - z_\ell| \leq \rho(u,v) + \rho(v,w)$.

Zum Beweis der Vollständigkeit von (ℓ^∞, ρ) sei $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in (ℓ^∞, ρ) mit den Gliedern $u_k = \{x_{k\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$|x_{k\ell} - x_{m\ell}| \leq \sup_{\ell\in\mathbb{N}} |x_{k\ell} - x_{m\ell}| = \rho(u_k, u_m) < \varepsilon$$

für alle $\ell, k, m \in \mathbb{N}$ mit $k, m \geq k_0$ gilt. Damit sind die Folgen $\{x_{m\ell}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ der ℓ-ten Folgeglieder für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ Cauchy-Folgen in $\mathbb{K}$, also in $\mathbb{K}$ konvergent. Somit existiert eine Folge $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ von Grenzwerten, so daß $\lim_{m\to\infty} |x_{m\ell} - x_\ell| = 0$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ gilt. Da $|x_{k\ell} - x_\ell| \leq |x_{k\ell} - x_{m\ell}| + |x_{m\ell} - x_\ell| \leq \varepsilon + |x_{m\ell} - x_\ell|$ für alle $\ell, k, m \in \mathbb{N}$ mit $k, m \geq k_0$ gilt, folgt daraus $|x_{k\ell} - x_\ell| \leq \varepsilon$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ und somit $\sup_{\ell\in\mathbb{N}} |x_{k\ell} - x_\ell| \leq \varepsilon$, wenn man den Grenzübergang $m \to \infty$ ausführt. Da $|x_\ell| \leq \varepsilon + |x_{k_0\ell}| \leq \varepsilon + \sup_{\ell\in\mathbb{N}} |x_{k_0\ell}|$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ gilt, folgt aus $u_{k_0} = \{x_{k_0\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ auch $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$. Außerdem ergibt sich $\rho(u_k, u) = \sup_{\ell\in\mathbb{N}} |x_{k\ell} - x_\ell| \leq \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$. Damit konvergiert die Cauchy-Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in (ℓ^∞, ρ) gegen den Grenzwert $u \in \ell^\infty$.

2. Um zu beweisen, daß c in (ℓ^∞, ρ) abgeschlossen ist, sei $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset c$ ein Folge mit den Gliedern $u_k = \{x_{k\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in c$, die gegen einen Grenzwert $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ in (ℓ^∞, ρ) konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig fixiert und $k \in \mathbb{N}$ derart gewählt, daß $\rho(u_k, u) < \frac{\varepsilon}{4}$ gilt.

Um zu zeigen, daß die Folge $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ zur Menge c der in $\mathbb{K}$ konvergenten Folgen gehört, genügt es, sich davon zu überzeugen, daß sie eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$ ist: Zunächst gilt für alle $\ell, n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |x_\ell - x_n| &\leq |x_\ell - x_{k\ell}| + |x_{k\ell} - x_{kn}| + |x_{kn} - x_n| \\ &\leq 2\rho(u_k, u) + |x_{k\ell} - x_{kn}| \leq \tfrac{\varepsilon}{2} + |x_{k\ell} - x_{kn}|. \end{aligned}$$

Da die Folge $u_k = \{x_{k\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in c$ in $\mathbb{K}$ konvergiert, gibt es einen Index $\ell_0 \in \mathbb{N}$, so daß $|x_{k\ell} - x_{kn}| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $\ell, n \in \mathbb{N}$ mit $\ell, n \geq \ell_0$ gilt, woraus sich schließlich $|x_\ell - x_n| \leq \varepsilon$ für alle $\ell, n \in \mathbb{N}$ mit $\ell, n \geq \ell_0$ und somit $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in c$ ergibt.

3. Um einzusehen, daß der metrische Raum (ℓ^∞, ρ) nicht separabel ist, soll gezeigt werden, daß jede in (ℓ^∞, ρ) dichte Teilmenge überabzählbar ist. Dazu wird die Teilmenge $d \subset \ell^\infty$ aller dyadischen Zahlenfolgen $\{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \{0, 1\}$ eingeführt. Sei E eine in (ℓ^∞, ρ) dichte Menge. Dann wird zu jedem $u \in d$ ein $Tu \in E$ mit der Eigenschaft $\rho(u, Tu) < \frac{1}{2}$ ausgewählt. Es soll gezeigt werden, daß die dadurch definierte Abbildung $T : d \to E$ injektiv ist: Sind $u, v \in d$ mit $u \neq v$ gegeben, dann folgt daraus $\rho(u, v) = 1$. Angenommen, es würde $Tu = Tv$ gelten. Dann ergäbe sich aus den beiden Beziehungen $\rho(u, Tu) < \frac{1}{2}$ und $\rho(v, Tu) = \rho(v, Tv) < \frac{1}{2}$ der Widerspruch $1 = \rho(u, v) \leq \rho(u, Tu) + \rho(Tu, v) < 1$. Somit muß $Tu \neq Tv$ gelten und $T : d \to E$ injektiv sein. Das bedeutet, daß T eine bijektive Abbildung zwischen der überabzählbaren Menge d und der Teilmenge $T[d]$ von E ist, das heißt, auch die in ℓ^∞ dichte Teilmenge E ist überabzählbar.

4. Um zu sehen, daß der metrische Teilraum (c, ρ) separabel ist, definiert man $Q = \mathbb{Q}$ im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $Q = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in \mathbb{Q}, \operatorname{Im} z \in \mathbb{Q}\}$ im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. In beiden Fällen liegt Q in $\mathbb{K}$ dicht. Man betrachtet die Menge $q \subset \ell^\infty$ aller Zahlenfolgen $v = \{y_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$, so daß $y_\ell \in Q$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ gilt sowie deren abzählbare Teilmenge $q_1 \subset q$ der Zahlenfolgen $w = \{z_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in q$, für die ein $\ell_0 \in \mathbb{N}$ und ein $z \in Q$ existiert, so daß $z_\ell = z$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell > \ell_0$ gilt.

Seien $\varepsilon > 0$ und eine konvergente Folge $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in c$ vorgegeben, die gegen den Grenzwert $x \in \mathbb{K}$ konvergiert. Dann gibt es ein $\ell_0 \in \mathbb{N}$, so daß $|x_\ell - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell > \ell_0$ gilt. Da Q in $\mathbb{K}$ dicht liegt, kann man ein $z \in Q$ mit $|x - z| < \frac{\varepsilon}{2}$ sowie eine Folge $w = \{z_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in q_1$ finden, so daß $|x_\ell - z_\ell| < \varepsilon$ für alle $\ell \in \{1, \ldots, \ell_0\}$ sowie $z_\ell = z$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell > \ell_0$ gilt. Dann folgt auch für alle $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell > \ell_0$ die Abschätzung $|x_\ell - z_\ell| = |x_\ell - z| \leq |x_\ell - x| + |x - z| < \varepsilon$, insgesamt also $\rho(u, w) = \sup_{\ell\in\mathbb{N}} |x_\ell - z_\ell| \leq \varepsilon$. Damit ist gezeigt, daß die abzählbare Menge q_1 dicht in (c, ρ) ist. $\square$