Übungsaufgaben 10

Meßbare und integrierbare Funktionen

Aufgabe 1. Sei der Koordinatenraum $(\mathbb{K}^n, \|\ \|)$ mit der durch $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n |x_k|^2$ für $x \in \mathbb{K}^n$ definierten Euklidischen Norm ausgestattet, ferner $F \subset \mathbb{K}^n$ eine nichtleere, abgeschlossene und *konvexe* Teilmenge, das heißt, es gelte

$$\lambda x + (1-\lambda)z \in F \quad \text{für alle } x, z \in F \text{ sowie } \lambda \in [0,1].$$

1. Man finde für jedes $y \in \mathbb{K}^n$ ein $z \in F$ mit der Eigenschaft

$$\operatorname{Re} \sum_{\ell=1}^n (\overline{y}_\ell - \overline{z}_\ell)(x_\ell - z_\ell) \leq 0 \quad \text{für alle } x \in F!$$

2. Man folgere daraus, daß für jedes $y \in \mathbb{K}^n$ mit $y \notin F$ eine abgeschlossene Hyperebene $E \subset \mathbb{K}^n$ mit der Trennungseigenschaft $F \cap \{y + \xi \in \mathbb{K}^n : \xi \in E\} = \varnothing$ existiert! ④

Lösung. 1. Für beliebig fixiertes $y \in \mathbb{K}^n$ wird die stetige Funktion $\varphi : F \to \mathbb{R}$ durch $\varphi(x) = \|y - x\|^2$ für $x \in F$ definiert. Betrachtet man $\delta = \inf\{\|y - x\| : x \in F\} \geq 0$ und die nichtleere, kompakte und konvexe Teilmenge $K = \{x \in F : \|y - x\| \leq \delta + 1\}$ von F, dann nimmt die stetige Funktion $\varphi : F \to \mathbb{R}$ ihr Minimum nach dem Satz von Weierstraß in einem Punkt $z \in K$ an. Da $z + \lambda(x - z) \in F$ für alle $x \in F$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt, ergibt sich daraus $\varphi(z) \leq \varphi(z + \lambda(x - z))$, das heißt,

$$\begin{aligned}\|y - z\|^2 &\leq \sum_{\ell=1}^n |(y_\ell - z_\ell) - \lambda(x_\ell - z_\ell)|^2 \\ &= \|y - z\|^2 + \lambda^2\|x - z\|^2 - 2\lambda \operatorname{Re} \sum_{\ell=1}^n (\overline{y}_\ell - \overline{z}_\ell)(x_\ell - z_\ell)\end{aligned}$$

und somit für alle $\lambda \in [0,1]$ die Beziehung

$$2\lambda \operatorname{Re} \sum_{\ell=1}^n (\overline{y}_\ell - \overline{z}_\ell)(x_\ell - z_\ell) \leq \lambda^2 \sum_{\ell=1}^n |x_\ell - z_\ell|^2.$$

Dividiert man durch $\lambda \in (0,1)$ und führt dann den Grenzübergang $\lambda \downarrow 0$ durch, so folgt

$$\operatorname{Re} \sum_{\ell=1}^n (\overline{y}_\ell - \overline{z}_\ell)(x_\ell - z_\ell) \leq 0 \quad \text{für alle } x \in F.$$

2. Gilt $y \in \mathbb{K}^n$, $y \notin F$ und $z \in F$, so wird durch die Vorschrift

$$\langle g, \xi \rangle = \sum_{\ell=1}^n (\overline{y}_\ell - \overline{z}_\ell)\, \xi_\ell \quad \text{für } \xi \in \mathbb{K}^n$$

ein nichttriviales lineares stetiges Funktional $g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ und somit eine abgeschlossene Hyperebene $E = \{\xi \in \mathbb{K}^n : \langle g, \xi \rangle = 0\}$ in $\mathbb{K}^n$ definiert. Da nach Schritt 1 die Ungleichung $\operatorname{Re} \langle g, x - z \rangle \leq 0$ für alle $x \in F$ gilt, ergibt sich

$$0 < \|y - z\|^2 = \operatorname{Re} \langle g, y - z \rangle \leq \operatorname{Re} \langle g, y - x \rangle \quad \text{für alle } x \in F$$

und somit $y - x \notin E$ für alle $x \in F$, das heißt, $F \cap \{y + \xi \in \mathbb{K}^n : \xi \in E\} = \varnothing$. □

Aufgabe 2. Sei $(V, \| \ \|_V)$ ein Banach-Raum über $\mathbb{K}$ und $\{f_1, \dots, f_n\} \subset V^*$ eine beliebig vorgegebene Familie linear unabhängiger Funktionale.

1. Man konstruiere eine Familie $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ mit der Eigenschaft

$$\langle f_k, v_\ell \rangle = \delta_{k\ell} \quad \text{für alle } k, \ell \in \{1, \dots, n\}!$$

2. Man weise nach, daß durch die Vorschrift

$$\|x\|_n = \inf\big\{\|v\|_V : v \in V,\ \langle f_k, v\rangle = x_k \text{ für jedes } k \in \{1, \dots, n\}\big\} \quad \text{für } x \in \mathbb{K}^n$$

eine Norm $\| \ \|_n : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ auf dem Koordinatenraum $\mathbb{K}^n$ definiert wird!

3. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Man zeige, daß für $y \in \mathbb{K}^n$ genau dann ein $v \in V$ mit

$$\|v\|_V < r + \varepsilon \quad \text{und} \quad \langle f_\ell, v\rangle = y_\ell \quad \text{für alle } \ell \in \{1, \dots, n\}$$

existiert, wenn es ein $r > 0$ gibt, so daß die Bedingung

$$\big|\textstyle\sum_{\ell=1}^n x_\ell y_\ell\big| \le r \big\|\textstyle\sum_{\ell=1}^n x_\ell f_\ell\big\|_{V^*} \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{K}^n$$

erfüllt ist! ⑧

Lösung. 1. Die Familie $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ wird rekursiv konstruiert: Im Falle $n = 1$ gibt es wegen $f_1 \neq 0$ einen Vektor $v_1 \in V$ mit $\langle f_1, v_1\rangle = 1$.

Unter der induktiven Annahme, daß die Existenz einer Familie $\{u_2, \dots, u_n\} \subset V$ mit $\langle f_k, u_\ell\rangle = \delta_{k\ell}$ für alle $k, \ell \in \{2, \dots, n\}$ bereits nachgewiesen ist, betrachtet man zunächst den abgeschlossenen linearen Teilraum

$$U_1 = \big\{u \in V : \langle f_k, u\rangle = 0 \text{ für jedes } k \in \{2, \dots, n\}\big\} \text{ von } V.$$

Dann gibt es für jedes $v \in V$ eine Darstellung in der Form

$$v = u + \textstyle\sum_{\ell=2}^n \alpha_\ell u_\ell \quad \text{mit } u \in U_1 \text{ und } \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}, \tag{1}$$

denn wählt man $\alpha_\ell = \langle f_\ell, v\rangle$ für $\ell \in \{2, \dots, n\}$ sowie $u = v - \sum_{\ell=2}^n \alpha_\ell u_\ell$, so ergibt sich

$$\langle f_k, u\rangle = \langle f_k, v\rangle - \textstyle\sum_{\ell=2}^n \alpha_\ell \langle f_k, u_\ell\rangle = \alpha_k - \alpha_k = 0 \quad \text{für alle } k \in \{2, \dots, n\}.$$

Außerdem ist die Darstellung (1) auch eindeutig, denn wegen $u \in U_1$ gilt

$$\langle f_k, v\rangle = \langle f_k, u\rangle + \textstyle\sum_{\ell=2}^n \alpha_\ell \langle f_k, u_\ell\rangle = \alpha_k \quad \text{für alle } k \in \{2, \dots, n\}.$$

Damit gibt es für jedes $v \in V$ eine eindeutige Darstellung in der Form

$$v = u + \textstyle\sum_{\ell=2}^n \langle f_\ell, v\rangle u_\ell \quad \text{mit } u \in U_1. \tag{2}$$

Angenommen, für jedes $u \in U_1$ würde stets $\langle f_1, u\rangle = 0$ gelten. Da für jedes $v \in V$ ein $u \in U_1$ mit der Darstellung (2) existiert, erhielte man

$$\langle f_1, v\rangle = \langle f_1, u\rangle + \textstyle\sum_{\ell=2}^n \langle f_\ell, v\rangle\langle f_1, u_\ell\rangle = \big\langle \textstyle\sum_{\ell=2}^n \langle f_1, u_\ell\rangle f_\ell, v\big\rangle$$

und somit die lineare Abhängigkeit des Funktionals $f_1 = \sum_{\ell=2}^n \langle f_1, u_\ell\rangle f_\ell \in V^*$ von den anderen Funktionalen $f_2, \dots, f_n \in V^*$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit gibt es stets ein $v_1 \in V$ mit $\langle f_k, v_1\rangle = \delta_{k1}$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$. Genauso beweist man für jedes $\ell \in \{2, \dots, n\}$ die Existenz eines Vektors $v_\ell \in V$ mit $\langle f_k, v_\ell\rangle = \delta_{k\ell}$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$.

2. Da nach Schritt 1 eine Familie $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ mit $\langle f_k, v_\ell\rangle = \delta_{k\ell}$ für alle $k, \ell \in \{1, \dots, n\}$ existiert, gehört für jedes $x \in \mathbb{K}^n$ der Vektor $v = \sum_{\ell=1}^n x_\ell v_\ell \in V$ zur Menge $\big\{v \in V : \langle f_k, v\rangle = x_k \text{ für jedes } k \in \{1, \dots, n\}\big\}$. Damit ist das Infimum

$$\|x\|_n = \inf\big\{\|v\|_V : v \in V,\ \langle f_k, v\rangle = x_k \text{ für jedes } k \in \{1, \dots, n\}\big\} \geq 0 \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{K}^n$$

stets endlich. Im Falle $\|x\|_n = 0$ gibt es für jedes beliebig fixierte $\varepsilon > 0$ ein $v \in V$ mit

$$\|v\|_V \leq \varepsilon \quad \text{und} \quad \langle f_k, v\rangle = x_k \quad \text{für jedes } k \in \{1, \dots, n\}.$$

Daraus folgt $|x_k| \leq \|f_k\|_{V^*}\|v\|_V \leq \varepsilon\|f_k\|_{V^*}$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ und somit $x = 0$, da $\varepsilon > 0$ anfangs beliebig vorgegeben wurde. Ferner gilt für alle $x \in \mathbb{K}^n$ und $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$ die Homogenität

$$\begin{aligned}
\|\alpha x\|_n &= \inf\big\{\|v\|_V : v \in V,\ \langle f_k, v\rangle = \alpha x_k \text{ für jedes } k \in \{1, \dots, n\}\big\} \\
&= \inf\big\{\|\alpha v\|_V : v \in V,\ \langle f_k, \alpha v\rangle = \alpha x_k \text{ für jedes } k \in \{1, \dots, n\}\big\} \\
&= |\alpha| \inf\big\{\|v\|_V : v \in V,\ \langle f_k, v\rangle = x_k \text{ für jedes } k \in \{1, \dots, n\}\big\} = |\alpha|\|x\|_n.
\end{aligned}$$

Zum Nachweis der Dreiecksungleichung seien $x, y \in \mathbb{K}^n$ sowie $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Man wählt $u, v \in V$ mit $\|u\|_V < \|x\|_n + \varepsilon$ und $\|v\|_V < \|y\|_n + \varepsilon$ sowie

$$\langle f_k, u\rangle = x_k \quad \text{und} \quad \langle f_k, v\rangle = y_k \quad \text{für jedes } k \in \{1, \dots, n\}.$$

Daraus folgt $\langle f_k, u + v\rangle = x_k + y_k$ für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ und somit

$$\|x + y\|_n \leq \|u + v\|_V \leq \|u\|_V + \|v\|_V < \|x\|_n + \|y\|_n + 2\varepsilon,$$

also $\|x + y\|_n \leq \|x\|_n + \|y\|_n$, da $\varepsilon > 0$ anfangs beliebig vorgegeben wurde.

3. Gibt es für $y \in \mathbb{K}^n$ einen Vektor $v \in V$, so daß $\langle f_\ell, v\rangle = y_\ell$ für alle $\ell \in \{1,\dots,n\}$ gilt, dann erhält man sofort

$$\Bigl|\sum_{\ell=1}^n x_\ell y_\ell\Bigr| = \Bigl|\Bigl\langle \sum_{\ell=1}^n x_\ell f_\ell, v\Bigr\rangle\Bigr| \leq \|v\|_V \Bigl\|\sum_{\ell=1}^n x_\ell f_\ell\Bigr\|_{V^*} \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{K}^n.$$

Sei umgekehrt $y \in \mathbb{K}^n$ sowie $r > 0$ gegeben, so daß die Bedingung

$$\Bigl|\sum_{\ell=1}^n x_\ell y_\ell\Bigr| \leq r \Bigl\|\sum_{\ell=1}^n x_\ell f_\ell\Bigr\|_{V^*} \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{K}^n$$

gilt, und sei $\delta > 0$ beliebig fixiert. Für gegebenes $x \in \mathbb{K}^n$, $x \neq 0$ folgt stets $\sum_{\ell=1}^n x_\ell f_\ell \neq 0$ wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionale $f_1, \dots, f_n \in V^*$ und damit

$$\tfrac{\delta}{2}\Bigl\|\sum_{\ell=1}^n x_\ell f_\ell\Bigr\|_{V^*} + \Bigl|\sum_{\ell=1}^n x_\ell y_\ell\Bigr| < (r+\delta)\Bigl\|\sum_{\ell=1}^n x_\ell f_\ell\Bigr\|_{V^*}.$$

Somit existiert ein $u \in V$ mit $\|u\|_V = r + \delta$ sowie

$$\tfrac{\delta}{2}\Bigl\|\sum_{\ell=1}^n x_\ell f_\ell\Bigr\|_{V^*} + \Bigl|\sum_{\ell=1}^n x_\ell y_\ell\Bigr| < \Bigl|\Bigl\langle \sum_{\ell=1}^n x_\ell f_\ell, u\Bigr\rangle\Bigr|.$$

Folglich besitzt der Vektor $w = \dfrac{\bigl|\sum_{\ell=1}^n x_\ell y_\ell\bigr|}{\bigl|\bigl\langle \sum_{\ell=1}^n x_\ell f_\ell, u\bigr\rangle\bigr|}\, u \in V$ die Eigenschaften

$$\Bigl|\Bigl\langle \sum_{\ell=1}^n x_\ell f_\ell, w\Bigr\rangle\Bigr| = \Bigl|\sum_{\ell=1}^n x_\ell y_\ell\Bigr| \quad \text{und} \quad \|w\|_V = \frac{\bigl|\sum_{\ell=1}^n x_\ell y_\ell\bigr| \|u\|_V}{\bigl|\bigl\langle \sum_{\ell=1}^n x_\ell f_\ell, u\bigr\rangle\bigr|} \leq \|u\|_V = r + \delta.$$

Schließlich findet man ein $\alpha \in \mathbb{K}$ mit $|\alpha| = 1$, so daß die Beziehungen

$$\Bigl\langle \sum_{\ell=1}^n x_\ell f_\ell, \alpha w\Bigr\rangle = \sum_{\ell=1}^n x_\ell y_\ell \quad \text{und} \quad \|\alpha w\|_V \leq r + \delta \quad \text{gelten.}$$

Definiert man $z \in \mathbb{K}^n$ durch $z_\ell = \langle f_\ell, \alpha w\rangle$ für $\ell \in \{1,\dots,n\}$, so ergibt sich im Hinblick auf die Definition der Norm $\|\ \|_n$ in Schritt 2 schließlich

$$\sum_{\ell=1}^n x_\ell z_\ell = \Bigl\langle \sum_{\ell=1}^n x_\ell f_\ell, \alpha w\Bigr\rangle = \sum_{\ell=1}^n x_\ell y_\ell \quad \text{sowie} \quad \|z\|_n \leq \|\alpha w\|_V \leq r + \delta.$$

Da jede abgeschlossene Hyperebene E in $\mathbb{K}^n$ als Menge $\bigl\{\xi \in \mathbb{K}^n : \sum_{\ell=1}^n x_\ell \xi_\ell = 0\bigr\}$ für ein geeignetes $x \in \mathbb{K}^n$, $x \neq 0$ darstellbar und die Kugel $K = \bigl\{\zeta \in \mathbb{K}^n : \|\zeta\|_n \leq r + \delta\bigr\}$ eine nichtleere, kompakte und konvexe Teilmenge von $\mathbb{K}^n$ ist, wurde somit nachgewiesen, daß es für jede abgeschlossene Hyperebene E in $\mathbb{K}^n$ einen Vektor $z \in K$ mit $z - y \in E$ gibt. Das Resultat aus Aufgabe 1 liefert folglich $y \in K$, also $\|y\|_n \leq r + \delta$ und damit $\|y\|_n \leq r$, da $\delta > 0$ anfangs beliebig vorgegeben wurde.

Hinsichtlich der Definition der Norm $\|\ \|_n$ in Schritt 2 existiert daher für jedes $\varepsilon > 0$ ein Vektor $v \in V$ mit $\|v\|_V < r + \varepsilon$ sowie $\langle f_\ell, v\rangle = y_\ell$ für jedes $\ell \in \{1,\dots,n\}$. $\square$

Aufgabe 3. Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein σ-endlicher und vollständiger Maßraum und $(V, \| \ \|_V)$ ein Banach-Raum über $\mathbb{K}$, der einen separablen Dualraum $(V^*, \| \ \|_{V^*})$ besitzt.

1. Man beweise, daß zu jedem $h \in V^{**}$ eine Folge $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V$ existiert, so daß $\{Ju_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V^{**}$ punktweise auf V^* gegen $h \in V^{**}$ konvergiert!

2. Man zeige, daß für jedes $g : X \to V^*$ die folgenden Aussagen äquivalent sind!

2.1. Die Funktion $g : X \to V^*$ ist meßbar.

2.2. Die Funktion $\langle h, g \rangle : X \to \mathbb{K}$ ist für jedes $h \in V^{**}$ meßbar.

2.3. Die Funktion $\langle g, u \rangle : X \to \mathbb{K}$ ist für jedes $u \in V$ meßbar. ④

Lösung. 1. Da der duale Raum $(V^*, \| \ \|_{V^*})$ separabel ist, kann man eine abzählbare Menge $\{f_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \subset V^*$ linear unabhängiger Funktionale mit $\operatorname{cl}\operatorname{lin}\{f_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} = V^*$ finden.

Wird $h \in V^{**}$ beliebig vorgegeben, dann ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Bedingung

$$\left|\sum_{\ell=1}^k x_\ell \langle h, f_\ell \rangle\right| = \left|\left\langle h, \sum_{\ell=1}^k x_\ell f_\ell \right\rangle\right| \le \|h\|_{V^{**}} \left\|\sum_{\ell=1}^k x_\ell f_\ell\right\|_{V^*} \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{K}^k$$

erfüllt. Somit existiert aufgrund von Aufgabe 2 für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein Vektor $u_k \in V$ mit

$$\|u_k\|_V < \|h\|_{V^{**}} + 1 \quad \text{und} \quad \langle f_\ell, u_k \rangle = \langle h, f_\ell \rangle \quad \text{für alle } \ell \in \{1, \dots, k\}.$$

Wegen der Stetigkeit der natürlichen Einbettung $J \in \mathcal{L}(V; V^{**})$ ist somit auch die Folge $\{Ju_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ in V^{**} beschränkt. Außerdem folgt $\langle Ju_k, f_\ell \rangle = \langle f_\ell, u_k \rangle = \langle h, f_\ell \rangle$ für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$ mit $k \ge \ell$, das heißt, $\lim_{k \to \infty} \langle Ju_k, f_\ell \rangle = \langle h, f_\ell \rangle$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$. Wegen $\operatorname{cl}\operatorname{lin}\{f_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} = V^*$ und der Beschränktheit der Folge $\{Ju_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V^{**}$ liefert der Satz von Banach-Steinhaus für Funktionale auf V^* die punktweise Konvergenz der Folge $\{Ju_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V^{**}$ gegen $h \in V^{**}$.

2. Nach dem Satz von Pettis ist wegen der Separabilität des dualen Raums $(V^*, \| \ \|_{V^*})$ eine Funktion $g : X \to V^*$ genau dann meßbar, wenn die Funktion $\langle h, g \rangle : X \to \mathbb{K}$ für jedes $h \in V^{**}$ meßbar ist.

Ist die Funktion $\langle h, g \rangle : X \to \mathbb{K}$ für jedes $h \in V^{**}$ meßbar, dann muß auch die Funktion $\langle g, u \rangle = \langle Ju, g \rangle : X \to \mathbb{K}$ für jedes $u \in V$ wegen $Ju \in V^{**}$ meßbar sein.

Sei die Funktion $\langle g, u \rangle : X \to \mathbb{K}$ für jedes $u \in V$ meßbar. Wird $h \in V^{**}$ beliebig vorgegeben, so gibt es nach Schritt 1 eine Folge $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V$, so daß $\{Ju_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V^{**}$ punktweise auf V^* gegen $h \in V^{**}$ konvergiert, das heißt, es gilt die Beziehung

$$\langle h, g(x) \rangle = \lim_{k \to \infty} \langle Ju_k, g(x) \rangle = \lim_{k \to \infty} \langle g(x), u_k \rangle \quad \text{für fast alle } x \in X.$$

Die Folge der nach Voraussetzung meßbaren Funktionen $\langle g(x), u_k \rangle : X \to \mathbb{K}$ konvergiert damit fast überall gegen die Grenzfunktion $\langle h, g \rangle : X \to \mathbb{K}$, die somit meßbar ist. $\square$