Übungsaufgaben 11

Duale Räume integrierbarer Funktionen

Aufgabe 1. Sei $(V, \| \ \|_V)$ ein separabler Banach-Raum über $\mathbb{K}$, ferner $\mu : \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ ein σ-endliches, vollständiges Maß auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(X)$ über X.

1. Man zeige, daß die Menge $M(\mathfrak{A}; V)$ aller Maße $\nu : \mathfrak{A} \to V$ von beschränkter Variation, welche absolut stetig bezüglich μ sind, einen linearen Raum über $\mathbb{K}$ bildet!

2. Definiert man als Norm auf $M(\mathfrak{A}; V)$ die Totalvariation $\|\nu\| = |\nu|(X)$ des Maßes $\nu \in M(\mathfrak{A}; V)$, so beweise man, daß $(M(\mathfrak{A}; V), \| \ \|)$ ein Banach-Raum ist! ④

Lösung. 1. Für $\nu_1, \nu_2 \in M(\mathfrak{A}; V)$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ ist auch $\alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_2 : \mathfrak{A} \to V$ ein Maß, denn ist $\{E_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ eine Zerlegung einer Menge $E \in \mathfrak{A}$, dann folgt aus der Konvergenz der Reihe $\big\{\sum_{\ell=1}^m \nu_1(E_\ell)\big\}_{m\in\mathbb{N}}$ in V gegen $\nu_1(E)$ sowie der Reihe $\big\{\sum_{\ell=1}^m \nu_2(E_\ell)\big\}_{m\in\mathbb{N}}$ in V gegen $\nu_2(E)$ stets die Konvergenz der Reihe $\big\{\sum_{\ell=1}^m (\alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_2)(E_\ell)\big\}_{m\in\mathbb{N}}$ in V gegen den Grenzwert $(\alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_2)(E)$. Da außerdem die Abschätzung

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{\ell=1}^m \|\alpha_1\nu_1(E_\ell) + \alpha_2\nu_2(E_\ell)\|_V &\le |\alpha_1| \textstyle\sum_{\ell=1}^m \|\nu_1(E_\ell)\|_V + |\alpha_2| \sum_{\ell=1}^m \|\nu_2(E_\ell)\|_V \\ &\le |\alpha_1||\nu_1|(E) + |\alpha_2||\nu_2|(E)\end{aligned}$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$ und somit auch $\sum_{\ell=1}^\infty \|(\alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_2)(E_\ell)\|_V \le |\alpha_1||\nu_1|(E) + |\alpha_2||\nu_2|(E)$ gilt, ergibt sich

$$|\alpha_1\nu_1 + \alpha_1\nu_2|(E) \le |\alpha_1||\nu_1|(E) + |\alpha_2||\nu_2|(E) \quad \text{für jedes } E \in \mathfrak{A}.$$

Für jedes $E \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(E) = 0$ gilt $\nu_1(E) = \nu_2(E) = 0$ und somit $(\alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_2)(E) = 0$. Damit gehört die Linearkombination $\alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_2$ zu $M(\mathfrak{A}; V)$. Außerdem gelten alle kommutativen, assoziativen und distributiven Gesetze eines linearen Raums.

2. Um einzusehen, daß die Totalvariation eine Norm auf $M(\mathfrak{A}; V)$ definiert, stellt man fest, daß $|\nu|(X) \ge 0$ für jedes Maß $\nu \in M(\mathfrak{A}; V)$ gilt und man im Falle $|\nu|(X) = 0$ für jede Menge $E \in \mathfrak{A}$ die Beziehung $\|\nu(E)\|_V \le |\nu|(E) \le |\nu|(X) = 0$, also $\nu = 0$ erhält. Desweiteren gilt für jedes $\nu \in M(\mathfrak{A}; V)$, $\alpha \in \mathbb{K}$ sowie jede Zerlegung $\{E_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ von X

$$\textstyle\sum_{\ell=1}^\infty \|\alpha\nu(E_\ell)\|_V = |\alpha| \sum_{\ell=1}^\infty \|\nu(E_\ell)\|_V \le |\alpha||\nu|(X)$$

und somit $|\alpha\nu|(X) = |\alpha||\nu|(X)$. Aus Schritt 1 folgt schließlich für alle $\nu_1, \nu_2 \in M(\mathfrak{A}; V)$ die Dreiecksungleichung $|\nu_1 + \nu_2|(X) \le |\nu_1|(X) + |\nu_2|(X)$.

3. Zum Beweis der Vollständigkeit von $M(\mathfrak{A}; V)$ sei $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset M(\mathfrak{A}; V)$ eine Cauchy-Folge in $M(\mathfrak{A}; V)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig fixiert. Dann gibt es einen Index $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$\|\nu_k(E) - \nu_n(E)\|_V \leq |\nu_k - \nu_n|(E) \leq \|\nu_k - \nu_n\| \leq \varepsilon$$

für alle $E \in \mathfrak{A}$ und $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k, n \geq k_0$ gilt. Da $(V, \| \ \|_V)$ ein Banach-Raum ist, konvergiert die Folge $\{\nu_k(E)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ in V für jedes $E \in \mathfrak{A}$ gegen einen Grenzwert $\nu(E) \in V$, wodurch eine Mengenfunktion $\nu : \mathfrak{A} \to V$ definiert wird. Der Grenzprozeß $n \to \infty$ liefert die Beziehung.

$$\|\nu_k(E) - \nu(E)\|_V \leq \varepsilon \quad \text{für alle } E \in \mathfrak{A} \text{ sowie } k \in \mathbb{N}, k \geq k_0.$$

4. Für jedes $E \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(E) = 0$ gilt stets $\nu_k(E) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, also $\nu(E) = 0$.

5. Ist $\{E_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ eine Zerlegung von $E \in \mathfrak{A}$, dann erhält man

$$\textstyle\sum_{\ell=1}^m \|\nu_k(E_\ell) - \nu_n(E_\ell)\|_V \leq |\nu_k - \nu_n|(E) \leq \varepsilon \quad \text{für alle } k, n, m \in \mathbb{N} \text{ mit } k, n \geq k_0$$

und somit wegen $\lim_{n\to\infty} \|\nu_n(E_\ell) - \nu(E_\ell)\|_V = 0$ die Abschätzungen

$$\textstyle\sum_{\ell=1}^m \|\nu_k(E_\ell) - \nu(E_\ell)\|_V \leq \varepsilon \ \text{ und } \ \sum_{\ell=1}^m \|\nu(E_\ell)\|_V \leq \sum_{\ell=1}^m \|\nu_k(E_\ell)\|_V + \varepsilon$$

für alle $k, m \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$, also auch

$$\textstyle\sum_{\ell=1}^\infty \|\nu_k(E_\ell) - \nu(E_\ell)\|_V \leq \varepsilon \ \text{ und } \ \sum_{\ell=1}^\infty \|\nu(E_\ell)\|_V \leq |\nu_k|(E) + \varepsilon.$$

6. Mit Schritt 3 ergibt sich daraus für $k = k_0$ und alle $m \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$\begin{aligned}\Big\|\nu(E) - \textstyle\sum_{\ell=1}^m \nu(E_\ell)\Big\|_V &\leq \|\nu(E) - \nu_{k_0}(E)\|_V + \Big\|\nu_{k_0}(E) - \textstyle\sum_{\ell=1}^m \nu(E_\ell)\Big\|_V \\ &\leq \varepsilon + \Big\|\nu_{k_0}(E) - \textstyle\sum_{\ell=1}^m \nu_{k_0}(E_\ell)\Big\|_V + \textstyle\sum_{\ell=1}^m \|\nu_{k_0}(E_\ell) - \nu(E_\ell)\|_V \\ &\leq 2\varepsilon + \Big\|\nu_{k_0}(E) - \textstyle\sum_{\ell=1}^m \nu_{k_0}(E_\ell)\Big\|_V.\end{aligned}$$

Wegen der Konvergenz der Reihe $\big\{\sum_{\ell=1}^m \nu_{k_0}(E_\ell)\big\}_{m\in\mathbb{N}}$ in V gegen den Grenzwert $\nu_{k_0}(E)$ folgt daraus $\lim_{m\to\infty} \big\|\nu(E) - \sum_{\ell=1}^m \nu(E_\ell)\big\|_V \leq 2\varepsilon$ und somit wegen der willkürlichen Wahl von $\varepsilon > 0$ die σ-Additivität $\nu(E) = \sum_{\ell=1}^\infty \nu(E_\ell) \in V$.

Somit ist $\nu : \mathfrak{A} \to V$ ein Maß, das hinsichtlich Schritt 4 absolut stetig bezüglich μ ist. Da wegen Schritt 5 für jede Zerlegung $\{E_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ einer Menge $E \in \mathfrak{A}$ sowohl

$$\textstyle\sum_{\ell=1}^\infty \|\nu(E_\ell)\|_V \leq |\nu_{k_0}|(E) + \varepsilon \ \text{ als auch } \ \sum_{\ell=1}^\infty \|\nu(E_\ell) - \nu_k(E_\ell)\|_V \leq \varepsilon$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$ gilt, ist $\mu : \mathfrak{A} \to V$ ein Maß von beschränkter Variation. Außerdem erhält man $|\nu_k - \nu|(E) \leq \varepsilon$ für alle $E \in \mathfrak{A}$ und $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$. Damit konvergiert die Cauchy-Folge $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $M(\mathfrak{A}; V)$ gegen $\nu \in M(\mathfrak{A}; V)$. $\square$

Aufgabe 2. Sei $(V, \| \ \|_V)$ ein separabler, reflexiver Banach-Raum über $\mathbb{K}$, dessen dualer Raum $(V^*, \| \ \|_{V^*})$ ebenfalls separabel ist. Sei desweiteren $\mu : \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ ein σ-endliches, vollständiges Maß auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(X)$ über X. Man weise nach, daß der Banach-Raum $L^p(X; V)$ für jedes $p \in (1, \infty)$ reflexiv ist! ④

Lösung. 1. Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gegeben. Nach Voraussetzung ist der duale Raum $(V^*, \| \ \|_{V^*})$ separabel. Da $(V, \| \ \|_V)$ separabel und reflexiv ist, muß die natürliche Einbettung $J_V : V \leftrightarrow V^{**}$ ein isometrischer Isomorphismus sein. Damit ist auch der biduale Raum $(V^{**}, \| \ \|_{V^{**}})$ separabel. Außerdem wird durch $(J_p u)(x) = J_V u(x)$ für $x \in X$ ein Isomorphismus $J_p : L^p(X; V) \leftrightarrow L^p(X; V^{**})$ definiert.

2. Man betrachtet den Isomorphismus $T_q : L^q(X; V^*) \leftrightarrow [L^p(X; V)]^*$, der durch

$$\langle T_q f, u \rangle = \int_X \langle f(x), u(x) \rangle \, d\mu(x) \quad \text{für } f \in L^q(X; V^*), u \in L^p(X; V),$$

definiert wird, fixiert $h \in [L^p(X; V)]^{**}$ beliebig und definiert $g \in [L^q(X; V^*)]^*$ durch

$$\langle g, f \rangle = \langle h, T_q f \rangle \quad \text{für alle } f \in L^q(X; V^*).$$

3. Erklärt man den Isomorphismus $A_p : L^p(X; V^{**}) \leftrightarrow [L^q(X; V^*)]^*$ durch

$$\langle A_p v, f \rangle = \int_X \langle v(x), f(x) \rangle \, d\mu(x) \quad \text{für } v \in L^p(X; V^{**}), \ f \in L^q(X; V^*),$$

dann ist $A_p J_p : L^p(X; V) \leftrightarrow [L^q(X; V^*)]^*$ nach Schritt 1 ein Isomorphismus, und es gilt

$$\langle A_p J_p u, f \rangle = \int_X \langle J_V u(x), f(x) \rangle \, d\mu(x) = \int_X \langle f(x), u(x) \rangle \, d\mu(x) = \langle T_q f, u \rangle$$

für alle $f \in L^q(X; V^*)$, $u \in L^p(X; V)$ wegen Schritt 2. Somit existiert ein $u \in L^p(X; V)$ mit $A_p J_p u = g$, das heißt, es gilt nach Schritt 2 die Identität

$$\langle T_q f, u \rangle = \langle A_p J_p u, f \rangle = \langle g, f \rangle = \langle h, T_q f \rangle \quad \text{für alle } f \in L^q(X; V^*).$$

Wegen $T_q[L^q(X; V^*)] = [L^p(X; V)]^*$ ist damit gezeigt, daß die natürliche Einbettung von $L^p(X; V)$ in den bidualen Raum $[L^p(X; V)]^{**}$ surjektiv und somit der Raum $L^p(X; V)$ reflexiv ist. □