

## Übungsaufgaben 12

# Vollstetige Abbildungen

**Aufgabe 1.** Seien  $(V, \|\cdot\|_V)$  und  $(W, \|\cdot\|_W)$  Banach-Räume über demselben Körper  $\mathbb{K}$ . Man beweise, daß der Bildraum  $T[V]$  einer vollstetigen Abbildung  $T \in \mathcal{K}(V; W)$  stets ein separabler linearer Teilraum von  $(W, \|\cdot\|_W)$  ist! ④

*Lösung.* Wegen  $T \in \mathcal{K}(V; W)$  ist das Bild  $T[K_\ell]$  der Kugel  $K_\ell = \{u \in V : \|u\|_V \leq \ell\}$  für jedes  $\ell \in \mathbb{N}$  relativ kompakt in  $W$ . Daher gibt es für jedes  $\ell \in \mathbb{N}$  eine abzählbare, in  $T[K_\ell] \subset W$  dichte Menge  $D_\ell \subset T[K_\ell]$ .

Da wegen  $V = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} K_\ell$  auch  $T[V] = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} T[K_\ell]$  gilt, ist  $\bigcup_{\ell=1}^{\infty} D_\ell \subset T[V]$  somit eine abzählbare, in  $\bigcup_{\ell=1}^{\infty} T[K_\ell] = T[V]$  dichte Menge, das heißt, der Bildraum  $T[V]$  ist ein separabler linearer Teilraum von  $(W, \|\cdot\|_W)$ .  $\square$

**Aufgabe 2.** Seien  $(V, \|\cdot\|_V)$  und  $(W, \|\cdot\|_W)$  Banach-Räume über demselben Körper  $\mathbb{K}$ . Sei ferner  $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(V; W)$  eine Folge, so daß der Bildraum  $T_k[V]$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$  endlichdimensional ist. Konvergiert die Folge  $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  in  $(\mathcal{L}(V; W), \|\cdot\|)$ , so zeige man, daß der Grenzwert  $T$  zu  $\mathcal{K}(V; W)$  gehört! ④

*Lösung.* Der Bildraum  $(T_k[V], \|\cdot\|_W)$  ist für jedes  $k \in \mathbb{N}$  ein endlichdimensionaler und damit abgeschlossener linearer Teilraum von  $(W, \|\cdot\|_W)$ . Wegen  $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(V; W)$  ist die Bildmenge  $T_k[E]$  für jede beschränkte Menge  $E \subset V$  im endlichdimensionalen Teilraum  $(T_k[V], \|\cdot\|_W)$  beschränkt und somit relativ kompakt in  $(T_k[V], \|\cdot\|_W)$ , das heißt, es gilt  $T_k \in \mathcal{K}(V; T_k[V])$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$ .

Da die natürliche Einbettung des Teilraums  $(T_k[V], \|\cdot\|_W)$  in  $(W, \|\cdot\|_W)$  eine lineare stetige Abbildung ist, ergibt sich daraus  $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}(V; W)$ .

Wegen der Konvergenz der Folge  $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}(V; W)$  in  $(\mathcal{L}(V; W), \|\cdot\|)$  gegen den Grenzwert  $T \in \mathcal{L}(V; W)$  und der Abgeschlossenheit des linearen Teilraums  $\mathcal{K}(V; W)$  in  $(\mathcal{L}(V; W), \|\cdot\|)$  ergibt sich  $T \in \mathcal{K}(V; W)$ .  $\square$

**Aufgabe 3.** Sei  $(V, \|\cdot\|_V)$  ein separabler Banach-Raum über  $\mathbb{R}$ , ferner  $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow [0, \infty]$  ein  $\sigma$ -endliches, vollständiges Maß auf einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}(X)$  über  $X$  sowie desweiteren  $u \in L^2(X; V)$  eine vorgegebene Funktion. Man weise nach, daß durch die Vorschrift

$$T\varphi = \int_X u\varphi \, d\mu \quad \text{für } \varphi \in L^2(X; \mathbb{R}),$$

eine vollstetige Abbildung  $T \in \mathcal{K}(L^2(X; \mathbb{R}); V)$  definiert wird! ④

*Lösung.* 1. Wegen  $u \in L^2(X; V)$  ist aufgrund der Hölder-Ungleichung die Funktion  $\|u\|_V |\varphi| : X \rightarrow \mathbb{R}$  für jedes  $\varphi \in L^2(X; \mathbb{R})$  integrierbar, und es gilt die Abschätzung

$$\|T\varphi\|_V \leq \int_X \|u\|_V |\varphi| d\mu \leq \|u\|_{L^2(X; V)} \|\varphi\|_{L^2(X; \mathbb{R})}.$$

Da  $T : L^2(X; \mathbb{R}) \rightarrow V$  eine lineare Abbildung ist, erhält man  $T \in \mathcal{L}(L^2(X; \mathbb{R}); V)$ .

2. Wegen der Dichtheit der einfachen Funktionen aus  $L^2(X; V)$  in  $L^2(X; V)$  kann man eine Folge  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset L^2(X; V)$  einfacher Funktionen wählen, die in  $L^2(X; V)$  gegen  $u \in L^2(X; V)$  konvergiert. Wird  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben, so existiert ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$\|u_k - u\|_{L^2(X; V)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, k \geq k_0.$$

3. Da  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset L^2(X; V)$  eine Folge einfacher Funktionen ist, findet man für jeden Index  $k \in \mathbb{N}$  eine Zerlegung  $\{E_{k\ell}\}_{\ell \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$  von  $X$  in Mengen endlichen Maßes sowie eine Folge  $\{v_{k\ell}\}_{\ell \in \mathbb{N}} \subset V$  mit der Darstellung  $u_k = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_{k\ell}} v_{k\ell} \in L^2(X; V)$ . Da für jedes  $k \in \mathbb{N}$  die Konvergenzbeziehung  $\sum_{\ell=1}^{\infty} \int_{E_{k\ell}} \|u_k\|_V^2 d\mu = \int_X \|u_k\|_V^2 d\mu$  gilt, kann man für jedes  $k \in \mathbb{N}$  ein  $m_k \in \mathbb{N}$  mit folgender Eigenschaft finden:

$$\begin{aligned} \int_X \|u_k - \sum_{\ell=1}^{m_k} \mathbb{1}_{E_{k\ell}} v_{k\ell}\|_V^2 d\mu &= \int_X \|\sum_{\ell=m_k+1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_{k\ell}} v_{k\ell}\|_V^2 d\mu \\ &= \sum_{\ell=m_k+1}^{\infty} \int_{E_{k\ell}} \|v_{k\ell}\|_V^2 d\mu = \sum_{\ell=m_k+1}^{\infty} \int_{E_{k\ell}} \|u_k\|_V^2 d\mu \leq \frac{1}{4} \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Wählt man  $w_k = \sum_{\ell=1}^{m_k} \mathbb{1}_{E_{k\ell}} v_{k\ell} \in L^2(X; V)$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$ , dann folgt mit Schritt 2

$$\|w_k - u\|_{L^2(X; V)} \leq \|w_k - u_k\|_{L^2(X; V)} + \|u_k - u\|_{L^2(X; V)} \leq \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, k \geq k_0.$$

4. Man definiert für jedes  $k \in \mathbb{N}$  eine Abbildung  $T_k : L^2(X; \mathbb{R}) \rightarrow V$  durch

$$T_k \varphi = \int_X w_k \varphi d\mu \quad \text{für } \varphi \in L^2(X; \mathbb{R}).$$

Wegen  $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset L^2(X; V)$  ist  $\|w_k\|_V |\varphi| : X \rightarrow \mathbb{R}$  aufgrund der Hölder-Ungleichung für jedes  $\varphi \in L^2(X; \mathbb{R})$  integrierbar, und es gilt die Abschätzung

$$\|T_k \varphi\|_V \leq \int_X \|w_k\|_V |\varphi| d\mu \leq \|w_k\|_{L^2(X; V)} \|\varphi\|_{L^2(X; \mathbb{R})} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Da  $T_k : L^2(X; \mathbb{R}) \rightarrow V$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$  linear ist, erhält man  $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(L^2(X; \mathbb{R}); V)$ .

Aufgrund der Konstruktion aus Schritt 3 ergibt sich für jedes  $k \in \mathbb{N}$  und  $\varphi \in L^2(X; \mathbb{R})$

$$T_k \varphi = \int_X \sum_{\ell=1}^{m_k} \mathbb{1}_{E_{k\ell}} v_{k\ell} \varphi d\mu = \sum_{\ell=1}^{m_k} \int_{E_{k\ell}} \varphi d\mu v_{k\ell} \in \text{lin} \{v_{k1}, \dots, v_{km_k}\},$$

das heißt, der Bildraum  $T_k[L^2(X; \mathbb{R})] \subset \text{lin} \{v_{k1}, \dots, v_{km_k}\}$  ist für jedes  $k \in \mathbb{N}$  von endlicher Dimension. Da für alle  $k \in \mathbb{N}, k \geq k_0$  und  $\varphi \in V$  nach Schritt 3 die Abschätzung

$$\|T_k \varphi - T \varphi\|_V \leq \int_X \|w_k - u\|_V |\varphi| d\mu \leq \|w_k - u\|_{L^2(X; V)} \|\varphi\|_{L^2(X; \mathbb{R})} \leq \varepsilon \|\varphi\|_{L^2(X; \mathbb{R})}$$

gilt, konvergiert die Folge  $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{L}(L^2(X; \mathbb{R}); V)$  gegen  $T \in \mathcal{L}(L^2(X; \mathbb{R}); V)$ , woraus sich nach Aufgabe 2 schließlich die Vollstetigkeit von  $T \in \mathcal{K}(L^2(X; \mathbb{R}); V)$  ergibt.  $\square$

*Alternative Lösung.* 1. Die Hölder-Ungleichung liefert wegen  $u \in L^2(X; V)$  die Integrierbarkeit der Funktion  $\|u\|_V |\varphi| : X \rightarrow \mathbb{R}$  für jedes  $\varphi \in L^2(X; \mathbb{R})$ , und es gilt

$$\|T\varphi\|_V \leq \int_X \|u\|_V |\varphi| d\mu \leq \|u\|_{L^2(X; V)} \|\varphi\|_{L^2(X; \mathbb{R})}.$$

Da  $T : L^2(X; \mathbb{R}) \rightarrow V$  eine lineare Abbildung ist, erhält man  $T \in \mathcal{L}(L^2(X; \mathbb{R}); V)$ .

2. Sei  $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V^*$  eine auf  $V$  punktweise gegen  $0 \in V^*$  konvergente Folge. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus für Funktionale ist  $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine in  $V^*$  beschränkte Folge. Wegen  $u \in L^2(X; V)$  folgt daraus die Beschränktheit der Folge  $\{\langle g_k, u \rangle\}_{k \in \mathbb{N}} \subset L^2(X; \mathbb{R})$ , denn es gilt die Abschätzung

$$\int_X |\langle g_k, u \rangle|^2 d\mu \leq \int_X \|g_k\|_{V^*}^2 \|u\|_V^2 d\mu \leq \|g_k\|_{V^*}^2 \|u\|_{L^2(X; V)}^2 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Außerdem konvergiert die Folge  $\{\langle g_k, u \rangle\}_{k \in \mathbb{N}}$  fast überall auf  $X$  punktweise gegen  $0 \in \mathbb{R}$ .

3. Für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $\varphi \in L^2(X; \mathbb{R})$  erhält man durch Anwendung des Satzes von Bochner über lineare stetige Abbildungen mit Hilfe der Hölder-Ungleichung für die adjungierte Abbildung  $T^* \in \mathcal{L}(V^*; [L^2(X; \mathbb{R})]^*)$

$$\begin{aligned} |\langle T^* g_k, \varphi \rangle| &= |\langle g_k, T\varphi \rangle| = \left| \langle g_k, \int_X u\varphi d\mu \rangle \right| \leq \int_X |\langle g_k, u\varphi \rangle| d\mu \\ &= \int_X |\langle g_k, u \rangle| |\varphi| d\mu \leq \|\langle g_k, u \rangle\|_{L^2(X; \mathbb{R})} \|\varphi\|_{L^2(X; \mathbb{R})} \end{aligned}$$

und somit die Abschätzung  $\|T^* g_k\|_{V^*} \leq \|\langle g_k, u \rangle\|_{L^2(X; \mathbb{R})}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Der Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz liefert im Grenzprozeß  $k \rightarrow \infty$  wegen Schritt 2

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|T^* g_k\|_{V^*}^2 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X |\langle g_k, u \rangle|^2 d\mu = \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} |\langle g_k, u \rangle|^2 d\mu = 0.$$

Da die auf  $V$  punktweise gegen  $0 \in V^*$  konvergente Folge  $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V^*$  anfangs willkürlich vorgegeben wurde und  $(V, \|\cdot\|_V)$  ein separabler Banach-Raum ist, liefert das Vollstetigkeitskriterium von Gelfand schließlich  $T \in \mathcal{K}(L^2(X; \mathbb{R}); V)$ .  $\square$