Übungsaufgaben 13

Gleichungen mit Fredholm-Operatoren

Aufgabe 1. Sei $(V, \| \ \|_V)$ ein Banach-Raum. Man zeige, daß es für jede vollstetige Abbildung $T \in \mathcal{K}(V;V)$ eine Zerlegung des Raumes V in eine topologisch direkte Summe $V = F + N$ von linearen Teilräumen F und N von V mit folgenden Eigenschaften gibt!

1. Der Teilraum F ist abgeschlossen und hat endliche Codimension.
2. Der Teilraum N ist endlichdimensional.
3. Die Einschränkung $(I - T)|F \in \mathcal{L}(F;F)$ ist ein Isomorphismus von F auf F.
4. Die Abbildung $I - T \in \mathcal{L}(V;V)$ bildet N in N ab.
5. Die Abbildung $T \in \mathcal{K}(V;V)$ erlaubt eine Darstellung als Summe $T = A + B$ zweier Abbildungen $A, B \in \mathcal{K}(V;V)$ mit $A[V] \subset F$ und $B[V] \subset N$, wobei $I - A \in \mathcal{L}(V;V)$ ein Isomorphismus von V auf V ist und $AB = BA = 0$ gilt. ④

Lösung. Der Satz von Riesz über den Fredholm-Index liefert für jedes $T \in \mathcal{K}(V;V)$ eine Zerlegung des Raumes V in eine topologisch direkte Summe $V = F + N$ von linearen Teilräumen F und N von V mit den ersten vier Eigenschaften.

Da $V = F + N$ eine topologisch direkte Summe ist, existieren lineare stetige Projektoren $P \in \mathcal{L}(V;V)$ von V auf F und $Q = I - P \in \mathcal{L}(V;V)$ von V auf N. Bildet man deren vollstetige Verkettungen $A = TP \in \mathcal{K}(V;V)$ und $B = TQ \in \mathcal{K}(V;V)$ mit $T \in \mathcal{K}(V;V)$, dann gilt zunächst $A + B = TP + T(I - P) = T$.

Aus der Darstellung $A = TP = P - (I - T)P$ mit $P[V] = F$ und $(I - T)[F] = F$ ergibt sich $A[V] \subset F$. Ebenso folgt aus $B = TQ = Q - (I - T)Q$ wegen $Q[V] = N$ sowie $(I - T)[N] \subset N$ auch $B[V] \subset N$.

Wegen $Q[F] = \{0\}$ liefern $A[V] \subset F$ und $B = TQ$ sofort $BA = 0$. Aufgrund von $P[N] = \{0\}$ erhält man aus $B[V] \subset N$ und $A = TP$ genauso leicht $AB = 0$.

Um einzusehen, daß $I - A \in \mathcal{L}(V;V)$ ein Isomorphismus von V auf V ist, genügt es, die Bijektivität von $I - A$ zu zeigen: Wird $v \in V$ mit $(I - A)v = 0$ vorgegeben, dann folgt aus $v = Pv + Qv$ zunächst

$$0 = (I - A)v = Pv + Qv - TPv = (I - T)Pv + Qv.$$

Wegen $Pv \in F$ und $(I - T)[F] = F$ sowie $Qv \in N$ folgt aus der Direktheit der Summe $V = F + N$ sofort $(I - T)Pv = 0$ und $Qv = 0$. Die Bijektivität von $(I - T)|F : F \leftrightarrow F$ liefert $Pv = 0$, also insgesamt $v = 0$. Damit ist $I - A \in \mathcal{L}(V;V)$ injektiv. Wegen der Vollstetigkeit von $A \in \mathcal{K}(V;V)$ ist der Operator $I - A \subset \mathcal{L}(V;V)$ nach dem Satz von Riesz über den Fredholm-Index somit ein Isomorphismus von V auf V. □

Aufgabe 2. Sei $\lambda : \mathfrak{L} \to [0, \infty]$ das Lebesgue-Maß auf der σ-Algebra $\mathfrak{L}$ der Lebesgue-meßbaren Teilmengen von $S = [0, 1]$ sowie $V = L^2(S; \mathbb{R})$ der Lebesgue-Raum der auf S quadratisch integrierbaren reellwertigen Funktionen.

Sei die vektorwertige Funktion $u \in L^2(S; V)$ für jedes $s \in S$ durch diejenige reellwertige Funktion $u(s) \in V = L^2(S; \mathbb{R})$ gegeben, welche durch

$$t \mapsto \min\{s, t\} - st \quad \text{für } t \in S$$

definiert wird. Schließlich wird mittels

$$T\varphi = \int_S u\varphi \, d\lambda \quad \text{für } \varphi \in V$$

eine vollstetige Abbildung $T \in \mathcal{K}(V; V)$ erklärt und die vom Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ abhängige Familie von Fredholm-Operatoren $I - \mu T \in \mathcal{L}(V; V)$ betrachtet.

1. Man zerlege $\mathbb{R}$ in die Menge $M = \{\mu \in \mathbb{R} : (I - \mu T)[V] = V\}$ aller regulären Werte und die Menge $\mathbb{R} \setminus M$ aller singulären Werte und zeige für jedes $\mu \in \mathbb{R} \setminus M$, daß die Lösungen $\varphi \in V$ der Gleichung $\varphi - \mu T\varphi = 0$ beliebig oft stetig differenzierbare Funktionen sind, welche durch die Lösung geeigneter Randwertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung berechnet werden können!

2. Man bestimme für jedes $\mu \in \mathbb{R} \setminus M$ eine Basis des Kerns $(I - \mu T)^{-1}[\{0\}] \subset V$!

3. Man zeige, daß für alle Werte $\mu, \sigma \in \mathbb{R} \setminus M$ mit $\mu \neq \sigma$ die entsprechenden Lösungen $\varphi_\mu, \varphi_\sigma \in V$ von $\varphi_\mu = \mu T\varphi_\mu$ und $\varphi_\sigma = \sigma T\varphi_\sigma$ stets $\int_S \varphi_\mu \varphi_\sigma \, d\lambda = 0$ erfüllen! ⑧

Lösung. 1. Wegen der Vollstetigkeit von $T \in \mathcal{K}(V; V)$ ist $I - \mu T \in \mathcal{L}(V; V)$ für jedes $\mu \in \mathbb{R}$ nach dem Satz von Riesz ein Fredholm-Operator vom Index Null. Damit ist die Abbildung $I - \mu T \in \mathcal{L}(V; V)$ genau dann surjektiv, wenn sie injektiv ist, das heißt, für die Menge aller regulären Werte gilt $M = \{\mu \in \mathbb{R} : (I - \mu T)^{-1}[\{0\}] = \{0\}\}$.

2. Seien $\mu \in \mathbb{R}$ sowie $\varphi \in V$ mit $\varphi = \mu T\varphi$ beliebig fixiert. Dann gilt für fast alle $t \in S = [0, 1]$ zunächst

$$\begin{aligned}(T\varphi)(t) &= \int_0^1 (\min\{s, t\} - st)\, \varphi(s) \, d\lambda(s) \\ &= (1 - t) \int_0^t s\varphi(s) \, d\lambda(s) + t \int_t^1 (1 - s)\, \varphi(s) \, d\lambda(s). \end{aligned} \tag{1}$$

Für alle $t_1, t_2 \in S$ mit $t_1 \le t_2$ liefert die Hölder-Ungleichung wegen $\varphi \in V = L^2(S; \mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\Big|\int_{t_1}^{t_2} s\varphi(s) \, d\lambda(s)\Big|^2 &\le \int_{t_1}^{t_2} s^2 \, d\lambda(s) \int_{t_1}^{t_2} |\varphi(s)|^2 \, d\lambda(s) \\ &\le \tfrac{1}{3}(t_2^3 - t_1^3)\|\varphi\|_V^2 \le \|\varphi\|_V^2 |t_2 - t_1|\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\Big|\int_{t_1}^{t_2} (1 - s)\varphi(s) \, d\lambda(s)\Big|^2 &\le \int_{t_1}^{t_2} (s - 1)^2 \, d\lambda(s) \int_{t_1}^{t_2} |\varphi(s)|^2 \, d\lambda(s) \\ &\le \tfrac{1}{3}\big((t_2 - 1)^3 - (t_1 - 1)^3\big)\|\varphi\|_V^2 \le \|\varphi\|_V^2 |t_2 - t_1|.\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die gleichmäßige Stetigkeit der Abbildungen $t \mapsto \int_0^t s\varphi(s)\,d\lambda(s)$ und $t \mapsto \int_0^t (1-s)\varphi(s)\,d\lambda(s)$. Aufgrund der Integraldarstellung (1) folgt $T\varphi \in BC(S;\mathbb{R})$, also auch $\varphi = \mu T\varphi \in BC(S;\mathbb{R})$.

3. Somit liefert die Darstellung (1) die stetige Differenzierbarkeit von $T\varphi \in BC(S;\mathbb{R})$. Die Ableitung $DT\varphi \in BC(S;\mathbb{R})$ hat für jedes $t \in S$ die Gestalt

$$\begin{aligned}(DT\varphi)(t) &= -\int_0^t s\varphi(s)\,d\lambda(s) + t(1-t)\varphi(t) + \int_t^1 (1-s)\,\varphi(s)\,d\lambda(s) - t(1-t)\,\varphi(t)\\ &= -\int_0^t s\varphi(s)\,d\lambda(s) + \int_t^1 (1-s)\,\varphi(s)\,d\lambda(s). \qquad (2)\end{aligned}$$

Damit ist auch $\varphi = \mu T\varphi \in BC(S;\mathbb{R})$ stetig differenzierbar, und es gilt $D\varphi = \mu DT\varphi \in BC(S;\mathbb{R})$. Schließlich ergibt sich aus der Darstellung (2) die stetige Differenzierbarkeit von $DT\varphi \in BC(S;\mathbb{R})$ sowie

$$(D^2T\varphi)(t) = -t\varphi(t) - (1-t)\varphi(t) = -\varphi(t) \quad \text{für alle } t \in S,$$

also $D^2\varphi = \mu D^2T\varphi = -\mu\varphi \in BC(S;\mathbb{R})$. Für jedes $\mu \in \mathbb{R}$ ist somit jede Lösung $\varphi \in V$ von $\varphi = \mu T\varphi$ beliebig oft stetig differenzierbar. Da wegen der Darstellung (1) offenbar $\varphi(0) = \mu(T\varphi)(0) = 0$ und $\varphi(1) = \mu(T\varphi)(1) = 0$ gilt, ist $\varphi \in V$ eine (beliebig oft stetig differenzierbare) Lösung des Randwertproblems

$$D^2\varphi + \mu\varphi = 0 \quad \text{auf } S, \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \qquad (3)$$

einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

4. Wegen der Bijektivität der Identität $I \in \mathcal{L}(V;V)$ ist $0 \in M$ ein regulärer Wert.

5. Im Falle $\mu < 0$ hat die allgemeine Lösung φ von $D^2\varphi + \mu\varphi = 0$ auf S die Gestalt

$$\varphi(t) = \alpha_1 \cosh\sqrt{|\mu|}\,t + \alpha_2 \sinh\sqrt{|\mu|}\,t \quad \text{für } t \in S \text{ und } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Da die Randbedingungen $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ erfüllt werden, hat das Randwertproblem (3) nur die triviale Lösung $\varphi = 0$, das heißt, jedes $\mu < 0$ ist ein regulärer Wert $\mu \in M$.

6. Im Falle $\mu > 0$ hat die allgemeine Lösung φ von $D^2\varphi + \mu\varphi = 0$ auf S die Gestalt

$$\varphi(t) = \alpha_1 \cos\sqrt{\mu}\,t + \alpha_2 \sin\sqrt{\mu}\,t \quad \text{für } t \in S \text{ und } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Die erste Randbedingung $\varphi(0) = 0$ wird nur für $\alpha_1 = 0$ erfüllt. Die zweite Randbedingung $\varphi(1) = 0$ wird nur für $\alpha_2 = 0$ oder $\mu > 0$, $\sin\sqrt{\mu} = 0$ angenommen. Da der zweite Fall genau dann eintritt, wenn $\mu \in \{k^2\pi^2 \in \mathbb{R} : k \in \mathbb{N}\}$ gilt und dann eine zugehörige Eigenfunktion $\varphi_\mu \in V$ durch $\varphi_\mu(t) = \sin\sqrt{\mu}\,t$ gegeben ist, erhält man die folgende Zerlegung von $\mathbb{R}$ in die Menge M regulärer und die Menge $\mathbb{R} \setminus M$ singulärer Werte:

$$M = \{\mu \in \mathbb{R} : \mu \neq k^2\pi^2,\ k \in \mathbb{N}\} \quad \text{sowie} \quad \mathbb{R} \setminus M = \{k^2\pi^2 \in \mathbb{R} : k \in \mathbb{N}\}.$$

Der geometrische Eigenraum zum singulären Wert $\mu \in \mathbb{R} \setminus M$ ist demnach der eindimensionale Kern $(I - \mu T)^{-1}[\{0\}] = \operatorname{lin}\{\varphi_\mu\} \subset V$.

7. Für die singulären Werte $\mu = k^2\pi^2$ und $\sigma = \ell^2\pi^2$ mit $k, \ell \in \mathbb{N}$ und $k \neq \ell$ liefert eine zweimalige partielle Integration

$$\begin{aligned}\int_S \varphi_\mu \varphi_\sigma \, d\lambda &= \int_0^1 \sin k\pi t \sin \ell\pi t \, d\lambda(t) = \tfrac{\ell}{k} \int_0^1 \cos k\pi t \cos \ell\pi t \, d\lambda(t) \\ &= \tfrac{\ell^2}{k^2} \int_0^1 \sin k\pi t \sin \ell\pi t \, d\lambda(t) = \tfrac{\ell^2}{k^2} \int_S \varphi_\mu \varphi_\sigma \, d\lambda\end{aligned}$$

und somit $\int_S \varphi_\mu \varphi_\sigma \, d\lambda = 0$ wegen $k \neq \ell$. □