Übungsaufgaben 14

Parameterabhängige Gleichungen

Aufgabe 1. Sei $(V, \|\ \|_V)$ der Banach-Raum aller Zahlenfolgen $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, für welche die Reihe $\{\sum_{\ell=1}^{k} |x_\ell|^2\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert, und auf dem durch die Vorschrift $\|u\|_V^2 = \sum_{\ell=1}^{\infty} |x_\ell|^2$ eine Norm erklärt wird.

1. Man zeige, daß durch die Zuordnung

$$u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in V \mapsto Tu = \left\{\sum_{\ell=k}^{\infty}(-2)^{-k-\ell}x_\ell\right\}_{k\in\mathbb{N}} \in V$$

ein vollstetiger Operator $T \in \mathcal{K}(V;V)$ definiert wird!

2. Man stelle den adjungierten Operator $T^* \in \mathcal{K}(V^*;V^*)$ explizit dar!

3. Man zerlege $\mathbb{C}$ in die Menge $M = \left\{\mu \in \mathbb{R} : (I-\mu T)^{-1}[\{0\}] = \{0\}\right\}$ aller regulären und die Menge $\mathbb{C} \setminus M$ aller singulären Parameterwerte!

4. Man bestimme für jeden singulären Parameterwert $\mu \in \mathbb{C}\setminus M$ jeweils eine Basis der Kerne $(I-\mu T)^{-1}[\{0\}] \subset V$ sowie $(I^*-\mu T^*)^{-1}[\{0\}] \subset V^*$! ⑧

Lösung. 1. Sei $B = \left\{u \in V : \|u\|_V < 1\right\}$ die Einheitskugel in $V = \ell^2$, $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in B$ eine vorgegebene Folge sowie $Tu = \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ die zugehörige Bildfolge. Dann ergibt sich für alle $m \in \mathbb{N}_0$ wegen der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned}\sum_{k=m+1}^{\infty} |y_k|^2 = \sum_{k=m+1}^{\infty} \left|\sum_{\ell=k}^{\infty}(-2)^{-k-\ell}x_\ell\right|^2 \le \|u\|_V^2 \sum_{k=m+1}^{\infty}\sum_{\ell=k}^{\infty} 4^{-k-\ell} \\ \le \sum_{k=m+1}^{\infty} 16^{-k}\sum_{\ell=0}^{\infty} 4^{-\ell} = \tfrac{4}{45}16^{-m}.\end{aligned}$$

Somit ist $T[B]$ in $V = \ell^2$ beschränkt, das heißt, es gilt $T \in \mathcal{L}(V;V)$. Außerdem findet man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ so daß $\sum_{k=m+1}^{\infty} |y_k|^2 < \varepsilon^2$ für alle $m \in \mathbb{N}$, $m \ge k_0$ sowie $Tu = \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $u \in B$ gilt. Nach dem Kompaktheitskriterium in $V = \ell^2$ aus Aufgabe 4.1 ist $T[B]$ relativ kompakt, das heißt, es gilt $T \in \mathcal{K}(V;V)$.

2. Nach Aufgabe 9.2 existiert ein konjugiert-linearer isometrischer Homöomorphismus $\mathcal{D} : V \leftrightarrow V^*$ mit der Eigenschaft

$$\langle \mathcal{D}w, u\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{z}_k x_k \quad \text{für alle } w = \{z_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in V, u = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in V.$$

Ist $g \in V^*$ ein beliebig vorgegebenes Funktional und $w = \{z_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in V$ mit $\mathcal{D}w = g$, dann gilt für jedes $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in V$ die Darstellung

$$\langle T^*g, u\rangle = \langle g, Tu\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{z}_k \sum_{\ell=k}^{\infty}(-2)^{-k-\ell}x_\ell = \sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\ell}(-2)^{-k-\ell}\,\overline{z}_k x_\ell.$$

Definiert man den Operator $A \in \mathcal{L}(V;V)$ durch die Zuordnung

$$w = \{z_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in V \mapsto Aw = \left\{\sum_{k=1}^{\ell}(-2)^{-k-\ell} z_k\right\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in V,$$

dann ergibt sich somit die Darstellung $T^*g = \mathcal{D}Aw = \mathcal{D}A\mathcal{D}^{-1}g$ für alle $g \in V^*$. Da nach dem Satz von Schauder der adjungierte Operator $T^* \in \mathcal{K}(V^*;V^*)$ vollstetig ist, muß auch $A = \mathcal{D}^{-1}T^*\mathcal{D} \in \mathcal{K}(V;V)$ vollstetig sein.

3. Es soll gezeigt werden, daß $\left\{4^m \in \mathbb{C} : m \in \mathbb{N}\right\}$ die Menge aller singulären Parameterwerte von $A \in \mathcal{K}(V;V)$ ist. Auf der Suche nach $\mu \in \mathbb{C}$ und Folgen $w = \{z_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in V$ mit $w = \mu Aw \neq 0$ ergibt sich die Bedingung

$$z_\ell = \mu \sum_{k=1}^{\ell}(-2)^{-k-\ell} z_k \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

wobei nach den Fällen $z_k = 0$ für $k \in \{1,\dots,m-1\}$, $z_m \neq 0$, $m \in \mathbb{N}$ unterschieden wird:

Die Bedingung (1) liefert die Identität $z_m = \frac{1}{4^m}\mu_m z_m$, also $\mu_m = 4^m$. Setzt man $z_m = 1$, so erhält man die weiteren Folgeglieder rekursiv aus der Bedingung (1), das heißt,

$$z_\ell = 0 \quad \text{für } \ell \in \{1,\dots,m-1\} \quad \text{und} \quad z_\ell = (-2)^{m-\ell}\prod_{k=1}^{\ell-m}\frac{4^k}{4^k-1} \quad \text{für } \ell \in \mathbb{N}, \ell \geq m.$$

Wegen $\{z_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in V$ wird durch $w_m = \{z_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in V$ der eindimensionale Eigenraum $(I - \mu_m A)^{-1}[\{0\}] = \mathrm{lin}\{w_m\}$ zum singulären Parameterwert $\mu_m = 4^m$ erzeugt. Damit ist $\left\{4^m \in \mathbb{C} : m \in \mathbb{N}\right\}$ die Menge aller singulären Parameterwerte von $A \in \mathcal{K}(V;V)$.

4. Da $\mathcal{D} : V \leftrightarrow V^*$ ein konjugiert-linearer isometrischer Homöomorphismus ist, muß $\left\{4^m \in \mathbb{C} : m \in \mathbb{N}\right\}$ auch die Menge aller singulären Parameterwerte des Operators $T^* = \mathcal{D}A\mathcal{D}^{-1} \in \mathcal{K}(V^*;V^*)$ und somit schließlich des Operators $T \in \mathcal{K}(V;V)$ selbst sein. Es gilt also $M = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq 4^m,\ m \in \mathbb{N}\right\}$ sowie $\mathbb{C} \setminus M = \left\{4^m \in \mathbb{C} : m \in \mathbb{N}\right\}$.

5. Somit verbleibt noch die Aufgabe, für jedes $m \in \mathbb{N}$ den eindimensionalen Eigenraum $(I - \mu_m T)^{-1}[\{0\}] \subset V$ zum singulären Parameterwert $\mu_m = 4^m \in \mathbb{C} \setminus M$ zu bestimmen. Für eine Folge $u_m = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in V$ mit $u_m = \mu_m T u_m$ erhält man die Bedingung

$$x_k = \mu_m \sum_{\ell=k}^{\infty}(-2)^{-k-\ell} x_\ell \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

wobei man offenbar $x_\ell = 0$ für $\ell \in \mathbb{N}, \ell > m$ sowie $x_m \neq 0$ wählen kann. Dann bestätigt Bedingung (2) die Gleichung $x_m = \frac{1}{4^m}\mu_m x_m$, also $\mu_m = 4^m$. Setzt man $x_m = 1$, dann erhält man die vorhergehenden Folgeglieder rekursiv aus der Bedingung (2), also

$$x_k = 2^{m-k}\prod_{\ell=1}^{m-k}\frac{1}{4^\ell-1} \quad \text{für } k \in \{1,\dots,m\} \quad \text{und} \quad x_k = 0 \quad \text{für } k \in \mathbb{N}, k > m.$$

Wegen $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in V$ wird durch die Folge $u_m = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in V$ der eindimensionale Eigenraum $(I - \mu_m T)^{-1}[\{0\}] = \mathrm{lin}\{u_m\}$ zum singulären Parameter $\mu_m = 4^m$ erzeugt. $\square$

Aufgabe 2. Seien $(V, \| \ \|_V)$ und $(W, \| \ \|_W)$ Banach-Räume über demselben Körper $\mathbb{K}$. Man zeige, daß für jeden Isomorphismus $S \in \mathcal{L}(V;W)$ von V auf W und jede vollstetige Abbildung $T \in \mathcal{K}(V;W)$ die Abbildung $A = S - T \in \mathcal{L}(V;W)$ die Fredholm-Eigenschaft und den Fredholm-Index $\operatorname{ind} A = 0$ besitzt! ④

Lösung. 1. Da $S \in \mathcal{L}(V;W)$ ein Isomorphismus von V auf W und $T \in \mathcal{K}(V;W)$ eine vollstetige Abbildung ist, muß $S^{-1}T \in \mathcal{K}(V;V)$ ein vollstetiger Operator und deshalb $S^{-1}A = I_V - S^{-1}T \in \mathcal{L}(V;V)$ nach dem Satz von Riesz über den Fredholm-Index ein Fredholm-Operator vom Index Null sein: Der Kern $(S^{-1}A)^{-1}[\{0\}]$ ist ein endlichdimensionaler linearer Teilraum von V und der Bildraum $(S^{-1}A)[V]$ ein abgeschlossenener linearer Teilraum von V endlicher Codimension, und es gilt

$$\operatorname{ind}(S^{-1}A) = \dim(S^{-1}A)^{-1}[\{0\}] - \operatorname{codim}(S^{-1}A)[V] = 0.$$

2. Da $S \in \mathcal{L}(V;W)$ ein Isomorphismus von V auf W ist, stimmt der Kern der Verkettung $S^{-1}A \in \mathcal{L}(V;V)$ wegen $(S^{-1}A)^{-1}[\{0\}] = A^{-1}[S[\{0\}]] = A^{-1}[\{0\}]$ mit dem Kern der Abbildung $A \in \mathcal{L}(V;W)$ überein, das heißt, beide Kerne haben dieselbe endliche Dimension $\dim(S^{-1}A)^{-1}[\{0\}] = \dim A^{-1}[\{0\}]$.

3. Der Isomorphismus $S \in \mathcal{L}(V;W)$ von V auf W bildet den abgeschlossenen linearen Teilraum $(S^{-1}A)[V] \subset V$ auf den Bildraum $A[V] \subset W$ ab. Da Isomorphismen abgeschlossene in abgeschlossene Mengen überführen, muß der Bildraum $A[V]$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von W sein.

4. Der abgeschlossene lineare Teilraum $(S^{-1}A)[V]$ von V hat endliche Codimension. Sei U ein endlichdimensionaler linearer Teilraum von V, so daß $V = (S^{-1}A)[V] + U$ eine topologisch direkte Summe ist, das heißt, die Zuordnung $(u_1, u_2) \mapsto u_1 + u_2$ ein Homöomorphismus von $(S^{-1}A)[V] \times U$ auf V ist. Da nach Schritt 3 und der Isomorphismuseigenschaft von $S \in \mathcal{L}(V;W)$ von V auf W die Zuordnung $(u_1, u_2) \mapsto (Su_1, Su_2)$ ein Homöomorphismus von $(S^{-1}A)[V] \times U$ auf $A[V] \times S[U]$ ist, muß schließlich auch die Zuordnung $(w_1, w_2) \mapsto w_1 + w_2$ ein Homöomorphismus von $A[V] \times S[U]$ auf W sein.

Damit ist $W = A[V] + S[U]$ eine topologisch direkte Summe. Da $S \in \mathcal{L}(V;W)$ ein Isomorphismus von V auf W ist, haben die beiden endlichdimensionalen linearen Teilräume $U \subset V$ und $S[U] \subset W$ dieselbe Dimension $\dim U = \dim S[U]$. Somit ist der Bildraum $A[V]$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von W mit der endlichen Codimension $\operatorname{codim} A[V] = \dim S[U] = \dim U = \operatorname{codim}(S^{-1}A)[V]$. Mit Schritt 1, 2 und 3 folgt daraus, daß die Abbildung $A \in \mathcal{L}(V;W)$ die Fredholm-Eigenschaft und den Index $\operatorname{ind} A = 0$ besitzt. □