Übungsaufgaben 15

Hilbert-Räume

Aufgabe 1. Sei $(V, (\ |\ ))$ ein Hilbert-Raum über $\mathbb{K}$ und $A : V \to V^*$ eine Abbildung, so daß für gegebene reelle Konstanten $L > 0$ und $\gamma > 0$ die Bedingungen

$$\|Av - Aw\|_{V^*} \leq L\|v - w\|_V \quad \text{und} \quad \operatorname{Re}\langle Av - Aw, v - w\rangle \geq \gamma\|v - w\|_V^2$$

für alle $v, w \in V$ erfüllt sind. Man zeige, daß $A : V \to V^*$ bijektiv ist und für die inverse Abbildung $A^{-1} : V^* \to V$ die Abschätzungen

$$\|A^{-1}f - A^{-1}g\|_V \leq \tfrac{1}{\gamma}\|f - g\|_{V^*} \quad \text{und} \quad \operatorname{Re}\langle f - g, A^{-1}f - A^{-1}g\rangle \geq \tfrac{\gamma}{L^2}\|f - g\|_{V^*}^2$$

für alle $f, g \in V^*$ gelten! ⑧

Lösung. 1. Seien $\delta \in \left(0, \frac{2\gamma}{L^2}\right)$ sowie $f \in V^*$ beliebig fixiert. Nach Voraussetzung ist die Abbildung $A : V \to V^*$ Lipschitz-stetig, ferner ist die Dualitätsabbildung $\mathcal{D} : V \leftrightarrow V^*$ ein konjugiert-linearer isometrischer Homöomorphismus. Es soll jetzt gezeigt werden, daß der durch

$$Tv = v - \delta\mathcal{D}^{-1}(Av - f) \quad \text{für } v \in V,$$

definierte Operator $T : V \to V$ eine Lipschitz-Konstante $L_\delta = \sqrt{1 - 2\delta\gamma + \delta^2L^2} < 1$ besitzt. Tatsächlich gilt für alle $v, w \in V$ die Identität

$$\begin{aligned}\|Tv - Tw\|_V^2 &= \big((v - w) - \delta\mathcal{D}^{-1}(Av - Aw)\big|(v - w) - \delta\mathcal{D}^{-1}(Av - Aw)\big)\\ &= \|v - w\|_V^2 - 2\delta\operatorname{Re}(\mathcal{D}^{-1}(Av - Aw)|v - w) + \delta^2\|\mathcal{D}^{-1}(Av - Aw)\|_V^2\end{aligned}$$

und somit wegen der Eigenschaften der Dualitätsabbildung $\mathcal{D}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|Tv - Tw\|_V^2 &= \|v - w\|_V^2 - 2\delta\operatorname{Re}\langle Av - Aw, v - w\rangle + \delta^2\|Av - Aw\|_{V^*}^2\\ &\leq \left(1 - 2\delta\gamma + \delta^2L^2\right)\|v - w\|_V^2.\end{aligned}$$

Es ergibt sich also $\|Tv - Tw\|_V \leq L_\delta\|v - w\|_V$ für alle $v, w \in V$ mit $0 \leq L_\delta < 1$. Aufgrund des Fixpunktsatzes von Banach (siehe Aufgabe 2.3) besitzt die Gleichung $Tv = v$ eine Lösung $v \in V$. Nach Konstruktion der Abbildung T folgt daraus $\mathcal{D}^{-1}(Av - f) = 0$, das heißt, $v \in V$ ist eine Lösung der Gleichung $Av = f$. Somit ist die Abbildung $A : V \to V^*$ surjektiv.

2. Seien $f, g \in V^*$ beliebig vorgegeben. Dann existieren nach Schritt 1 zwei Elemente $v, w \in V$ mit $Av = f$ und $Aw = g$. Daraus folgt nach Voraussetzung

$$\gamma\|v - w\|_V^2 \leq \operatorname{Re}\langle Av - Aw, v - w\rangle = \operatorname{Re}\langle f - g, v - w\rangle \leq \|f - g\|_{V^*}\|v - w\|_V.$$

Im Falle $f = g$ ergibt sich daraus $v = w$, das heißt, die Abbildung $A : V \to V^*$ ist injektiv, also auch bijektiv.

Für $v = A^{-1}f$ und $w = A^{-1}g$ erhält man aus der letzten Abschätzung außerdem

$$\|A^{-1}f - A^{-1}g\|_V = \|v - w\|_V \le \tfrac{1}{\gamma}\|f - g\|_{V^*} \quad \text{für alle } f, g \in V^*.$$

Desweiteren folgt nach Voraussetzung

$$\operatorname{Re}\langle f - g, A^{-1}f - A^{-1}g\rangle = \operatorname{Re}\langle Av - Aw, v - w\rangle \ge \gamma\|v - w\|_V^2 \ge \tfrac{\gamma}{L^2}\|Av - Aw\|_{V^*}^2$$

und damit $\operatorname{Re}\langle f - g, A^{-1}f - A^{-1}g\rangle \ge \frac{\gamma}{L^2}\|f - g\|_{V^*}^2$ für alle $f, g \in V^*$. □

Aufgabe 2. Sei $(V, (\ |\ ))$ ein unendlichdimensionaler separabler Hilbert-Raum über $\mathbb{K}$. Man zeige, daß für jeden unendlichdimensionalen abgeschlossenen linearen Teilraum U von V eine isometrische Abbildung $T \in \mathcal{L}(V; V)$ von V auf U existiert! ④

Lösung. 1. Sei $(V, (\ |\ ))$ ein unendlichdimensionaler separabler Hilbert-Raum über $\mathbb{K}$ und U ein unendlichdimensionaler abgeschlossener und somit auch vollständiger linearer Teilraum von V. Nach Definition ist auch der zu U orthogonale Teilraum

$$U^\perp = \big\{v \in V : (u|v) = 0 \ \text{ für alle } u \in U\big\}$$

ein abgeschlossener und somit vollständiger linearer Teilraum von V. Desweiteren ist $V = U + U^\perp$ eine topologisch direkte Summe und die Projektoren $P_U \in \mathcal{L}(V; V)$ von V auf U sowie $P_{U^\perp} \in \mathcal{L}(V; V)$ von V auf $U^\perp$ sind lineare stetige Operatoren.

Da der unendlichdimensionale Hilbert-Raum $(V, (\ |\ ))$ separabel ist, gibt es eine unendliche Folge $\{\varphi_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset V$, die in V dicht liegt. Werden $u \in U$ und $w \in U^\perp$ beliebig fixiert, dann existieren für jedes $\varepsilon > 0$ Indizes $k \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned}\|P_U\varphi_k - u\|_V^2 + \|\varphi_k - P_U\varphi_k\|_V^2 &= \|\varphi_k - u\|_V^2 \le \varepsilon^2,\\ \|P_{U^\perp}\varphi_m - w\|_V^2 + \|\varphi_m - P_{U^\perp}\varphi_m\|_V^2 &= \|\varphi_m - w\|_W^2 \le \varepsilon^2.\end{aligned}$$

Die Folgen $\{P_U\varphi_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset U$ bzw. $\{P_{U^\perp}\varphi_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset U^\perp$ der Projektionen sind somit dicht in U bzw. $U^\perp$, woraus die Separabilität der vollständigen linearen Teilräume U und $U^\perp$ von V folgt, die somit allesamt separable Hilbert-Räume sind. Da U und V unendlichdimensional sind, existieren isometrische Isomorphismen $T : V \leftrightarrow \ell^2$ sowie $S : U \leftrightarrow \ell^2$ und damit auch ein isometrischer Isomorphismus $S^{-1}T : V \leftrightarrow U$. □