

## Übungsaufgaben 2

### Kompaktheit und Stetigkeit

**Aufgabe 1.** Man zeige, daß man für jede offene Überdeckung  $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  eines kompakten metrischen Raums  $(X, \rho)$  eine Konstante  $r_0 > 0$  finden kann, so daß für jedes  $u \in X$  ein Index  $\gamma \in \Gamma$  mit  $B(u, r_0) \subset U_\gamma$  existiert! ④

*Lösung.* 1. Für jeden Punkt  $u \in X$  gibt es ein  $\gamma \in \Gamma$ , so daß  $u \in U_\gamma$  gilt; folglich gibt es wegen der Offenheit von  $U_\gamma$  in  $X$  einen Radius  $r(u) > 0$  mit  $B(u, 2r(u)) \subset U_\gamma$ . Da die Familie  $\{B(u, r(u))\}_{u \in X}$  der Kugeln eine offene Überdeckung des kompakten metrischen Raums  $(X, \rho)$  bildet, existiert eine endliche Menge  $\{u_1, \dots, u_k\} \subset X$  von Punkten, so daß auch die endliche Teilfamilie  $\{B(u_1, r(u_1)), \dots, B(u_k, r(u_k))\}$  den Raum  $X$  überdeckt.

2. Sei  $r_0 = \min\{r(u_1), \dots, r(u_k)\}$  der kleinste dieser Radien. Da es für jedes  $u \in X$  einen Index  $\ell \in \{1, \dots, k\}$  mit  $u \in B(u_\ell, r(u_\ell))$  gibt, gilt auch  $B(u, r_0) \subset B(u_\ell, 2r(u_\ell))$ . Nach Konstruktion kann man für jedes  $\ell \in \{1, \dots, k\}$  einen Index  $\gamma \in \Gamma$  finden, so daß  $B(u_\ell, 2r(u_\ell)) \subset U_\gamma$  gilt, woraus sich  $B(u, r_0) \subset U_\gamma$  ergibt. □

**Aufgabe 2.** Sei  $(\ell^\infty, \rho)$  der metrische Raum aller Zahlenfolgen  $u = \{x_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ , für die das Supremum  $\sup_{\ell \in \mathbb{N}} |x_\ell|$  endlich ist, und der mit der durch  $\rho(u, v) = \sup_{\ell \in \mathbb{N}} |x_\ell - y_\ell|$  für  $u = \{x_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$  und  $v = \{y_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$  definierten Metrik ausgestattet ist. Man zeige, daß im Raum  $(\ell^\infty, \rho)$  keine abgeschlossene Kugel kompakt ist! ④

*Lösung.* Sei  $K(u, r) = \{v \in \ell^\infty : \rho(u, v) \leq r\}$  eine abgeschlossene Kugel mit beliebig vorgegebenem Mittelpunkt  $u = \{x_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$  und Radius  $r > 0$ . Es soll eine Folge  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset K(u, r)$  mit den Gliedern  $u_k = \{x_{k\ell}\}_{\ell \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$  konstruiert werden, die keinen Häufungspunkt in  $\ell^\infty$  besitzt. Dazu definiert man für alle  $k, \ell \in \mathbb{N}$  die Folgeglieder

$$x_{k\ell} = \begin{cases} x_\ell + r & \text{falls } k = \ell, \\ x_\ell & \text{falls } k \neq \ell. \end{cases}$$

Dann gilt  $\rho(u_k, u) = \sup_{\ell \in \mathbb{N}} |x_{k\ell} - x_\ell| = r$  sowie  $\rho(u_k, u_m) = \sup_{\ell \in \mathbb{N}} |x_{k\ell} - x_{m\ell}| = r > 0$  für alle  $k, m \in \mathbb{N}$  mit  $k \neq m$ , das bedeutet, die Folge  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset K(u, r)$  hat in  $\ell^\infty$  keinen Häufungspunkt. □

**Aufgabe 3.** Sei  $(X, \rho)$  ein vollständiger metrischer Raum und  $T : X \rightarrow X$  eine Abbildung, für die eine Lipschitz-Konstante  $0 \leq L < 1$  existiert, so daß  $\rho(Tu, Tv) \leq L\rho(u, v)$  für alle  $u, v \in X$  gilt. Ferner werde für einen Punkt  $u_0 \in X$  eine Folge  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$  durch  $u_k = Tu_{k-1}$  für  $k \in \mathbb{N}$  rekursiv definiert. Man beweise die folgenden Aussagen:

1. Es gilt  $(1 - L)\rho(u_k, u_\ell) \leq L^k \rho(u_1, u_0)$  für alle  $k, \ell \in \mathbb{N}$  mit  $k < \ell$ .
2. Die Folge  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$  konvergiert gegen einen Grenzwert  $u \in X$ .
3. Dieser Grenzwert  $u \in X$  ist ein *Fixpunkt* von  $T : X \rightarrow X$ , das heißt, es gilt  $Tu = u$ .
4. Die Abbildung  $T : X \rightarrow X$  hat genau einen Fixpunkt. ④

*Lösung.* 1. Es soll gezeigt werden, daß die rekursiv definierte Folge  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$  für einen beliebigen Startpunkt  $u_0 \in X$  konvergiert: Zunächst gilt

$$\rho(u_{k+1}, u_k) = \rho(Tu_k, Tu_{k-1}) \leq L\rho(u_k, u_{k-1}) \leq \dots \leq L^k \rho(u_1, u_0)$$

für jedes  $k \in \mathbb{N}$ . Daraus folgt für alle  $k, \ell \in \mathbb{N}$  mit  $k < \ell$  die Beziehung

$$\rho(u_\ell, u_k) = \sum_{m=k}^{\ell-1} \rho(u_{m+1}, u_m) \leq \rho(u_1, u_0) \sum_{m=k}^{\ell-1} L^m = L^k \rho(u_1, u_0) \sum_{m=0}^{\ell-k-1} L^m.$$

Wegen  $0 \leq L < 1$  gilt  $\sum_{m=0}^{\ell-k-1} L^m \leq \sum_{m=0}^{\infty} L^m = \frac{1}{1-L}$  und somit

$$(1 - L)\rho(u_\ell, u_k) \leq L^k \rho(u_1, u_0) \quad \text{für alle } k, \ell \in \mathbb{N} \text{ mit } k < \ell.$$

2. Da  $\{L^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  eine Nullfolge ist, muß  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$  eine Cauchy-Folge sein, die wegen der Vollständigkeit von  $(X, \rho)$  gegen einen Grenzwert  $u \in X$  konvergiert. Führt man in der letzten Ungleichung den Grenzübergang  $\ell \rightarrow \infty$  aus, so ergibt sich die außerdem die Abschätzung  $(1 - L)\rho(u, u_k) \leq L^k \rho(u_1, u_0)$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

3. Um einzusehen, daß dieser Grenzwert  $u \in X$  ein Fixpunkt von  $T$  ist, führt man in der für alle  $k \in \mathbb{N}$  geltenden Abschätzung

$$\rho(Tu, u) \leq \rho(Tu, Tu_k) + \rho(u_{k+1}, u) \leq L\rho(u_k, u) + \rho(u_{k+1}, u)$$

den Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$  durch und erhält  $Tu = u$  wegen  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(u_k, u) = 0$ .

4. Sind  $u, v \in X$  zwei Fixpunkte von  $T$ , dann gilt  $\rho(u, v) = \rho(Tu, Tv) \leq L\rho(u, v)$ , also  $(1 - L)\rho(u, v) \leq 0$ . Wegen  $0 \leq L < 1$  folgt daraus  $u = v$ , das heißt, der Fixpunkt  $u \in X$  von  $T$  ist eindeutig bestimmt. □