Übungsaufgaben 3

Räume stetiger Abbildungen

Aufgabe. Sei für das abgeschlossene Intervall $X \subset \mathbb{R}$ auf der Menge $BC(X,\mathbb{R})$ aller beschränkten stetigen Abbildungen $T : X \to \mathbb{R}$ wie üblich eine Metrik durch $\rho(T_1, T_2) = \sup_{u\in X} |T_1 u - T_2 u|$ für alle $T_1, T_2 \in BC(X;\mathbb{R})$ gegeben.

1. Man beweise mit Hilfe der binomischen Formel, daß die beiden Beziehungen

$$\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} u^\ell (1-u)^{k-\ell} = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} u^\ell (1-u)^{k-\ell} (\ell - ku)^2 = ku(1-u)$$

für alle $u \in [0,1]$ und $k \in \mathbb{N}$ gelten! ③

2. Seien für jedes $k \in \mathbb{N}$ und alle $\ell \in \{0,1,\dots,k\}$ die Punkte $u_{k\ell} = \frac{\ell}{k} \in [0,1]$ definiert. Wird für jedes $T \in BC([0,1];\mathbb{R})$ und $k \in \mathbb{N}$ eine Abbildung $T_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$T_k u = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} u^\ell (1-u)^{k-\ell} T u_{k\ell} \quad \text{für } u \in [0,1]$$

erklärt, so beweise man, daß die Folge $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset BC([0,1];\mathbb{R})$ *gleichmäßig* gegen die Abbildung $T \in BC([0,1];\mathbb{R})$ konvergiert, also $\lim_{k\to\infty} \sup_{u\in[0,1]} |T_k u - Tu| = 0$ gilt! ③

3. Man zeige, daß der metrische Raum $\big(BC([0,1];\mathbb{R}), \rho\big)$ separabel ist! ③

4. Man weise nach, daß der metrische Raum $\big(BC(\mathbb{R};\mathbb{R}), \rho\big)$ *nicht* separabel ist! ③

Lösung. 1. Sei $k \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Für alle $u \in [0,1]$ liefert die binomische Formel

$$\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} u^\ell (1-u)^{k-\ell} = (u + (1-u))^k = 1. \tag{1}$$

Differenziert man die Terme in der für $v \in [0,\infty)$ geltenden binomischen Formel

$$\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} v^\ell = (v+1)^k$$

nach v, dann ergeben sich für alle $v \in [0,\infty)$ die Identitäten

$$\sum_{\ell=1}^{k} \binom{k}{\ell} \ell v^{\ell-1} = k(v+1)^{k-1}, \text{ also } \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \ell v^\ell = kv(v+1)^{k-1}. \tag{2}$$

Differenziert man die letzten Ausdrücke erneut nach v, so erhält man für alle $v \in [0,\infty)$

$$\sum_{\ell=1}^{k} \binom{k}{\ell} \ell^2 v^{\ell-1} = k(kv+1)(v+1)^{k-2}, \text{ also } \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \ell^2 v^\ell = kv(kv+1)(v+1)^{k-2}. \tag{3}$$

Setzt man $v = \frac{u}{1-u} \in [0,\infty)$ für $u \in [0,1)$ in die Formeln (2) und (3) ein und multipliziert anschließend mit $(1-u)^k$, dann ergibt sich für alle $u \in [0,1]$

$$\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \ell u^\ell (1-u)^{k-\ell} = ku, \tag{4}$$

$$\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \ell^2 u^\ell (1-u)^{k-\ell} = ku(1-u+ku). \tag{5}$$

Multipliziert man die Ausdrücke in (1) mit $(ku)^2$ und die Ausdrücke in (4) mit $-2ku$ und addiert die resultierenden Produkte zu den Termen in (5), so folgt für alle $u \in [0,1]$

$$\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} u^\ell (1-u)^{k-\ell} (ku-\ell)^2 = (ku)^2 - 2(ku)^2 + ku(1-u+ku) = ku(1-u). \tag{6}$$

2. Aus der Kompaktheit des Intervalls $[0,1] \subset \mathbb{R}$ ergibt sich die gleichmäßige Stetigkeit von $T \in BC([0,1];\mathbb{R})$. Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, dann gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle Punkte $u, v \in [0,1]$ aus $|u-v| < \delta$ stets $|Tu - Tv| < \varepsilon$ folgt.

Seien $k \in \mathbb{N}$ und $u \in [0,1]$ fixiert. Multipliziert man die Ausdrücke in der binomischen Formel (1) mit Tu, dann ergibt sich aus der Definition von $T_k \in BC([0,1];\mathbb{R})$ die Abschätzung

$$|T_k u - Tu| \le \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} u^\ell (1-u)^{k-\ell} |Tu_{k\ell} - Tu| \quad \text{für alle } u \in [0,1]. \tag{7}$$

Zerlegt man $\{0,1,\ldots,k\}$ in die beiden disjunkten Indexmengen

$$L = \{\ell \in \{0,1,\ldots,k\} : |u_{k\ell} - u| < \delta\}, \quad M = \{\ell \in \{0,1,\ldots,k\} : |u_{k\ell} - u| \ge \delta\},$$

dann gilt $|Tu_{k\ell} - Tu| < \varepsilon$ für alle $\ell \in L$ und somit wegen (1) auch

$$\sum_{\ell \in L} \binom{k}{\ell} u^\ell (1-u)^{k-\ell} |Tu_{k\ell} - Tu| \le \varepsilon \sum_{\ell \in L} \binom{k}{\ell} u^\ell (1-u)^{k-\ell} \le \varepsilon. \tag{8}$$

Da andererseits $|u_{k\ell} - u|^2 \ge \delta^2$ sowie $u_{k\ell} = \frac{\ell}{k}$ für alle $\ell \in M$ gilt, ergibt sich außerdem

$$\begin{aligned}\sum_{\ell \in M} \binom{k}{\ell} u^\ell (1-u)^{k-\ell} |Tu_{k\ell} - Tu| &\le 2 \max_{u \in [0,1]} |Tu| \sum_{\ell \in M} \binom{k}{\ell} u^\ell (1-u)^{k-\ell} \\ &\le 2 \max_{u \in [0,1]} |Tu| \sum_{\ell \in M} \binom{k}{\ell} u^\ell (1-u)^{k-\ell} \frac{(\ell - ku)^2}{(k\delta)^2}\end{aligned}$$

und somit wegen (6) für alle $\ell \in M$ die Abschätzung

$$\sum_{\ell \in M} \binom{k}{\ell} u^\ell (1-u)^{k-\ell} |Tu_{k\ell} - Tu| \le \frac{2ku(1-u)}{(k\delta)^2} \max_{u \in [0,1]} |Tu|. \tag{9}$$

Fügt man die Beziehungen (8) und (9) in (7) ein, so erhält man wegen $u(1-u) \le \frac{1}{4}$

$$|T_k u - Tu| \le \varepsilon + \frac{2ku(1-u)}{(k\delta)^2} \max_{u \in [0,1]} |Tu| \le \varepsilon + \frac{1}{2k\delta^2} \max_{u \in [0,1]} |Tu|$$

für alle $u \in [0,1]$ und $k \in \mathbb{N}$. Schließlich ergibt sich daraus

$$\max_{u \in [0,1]} |T_k u - Tu| \le 2\varepsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \ge \frac{1}{2\varepsilon\delta^2} \max_{u \in [0,1]} |Tu|,$$

das heißt, die gleichmäßige Konvergenz der Folge $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset BC([0,1];\mathbb{R})$ gegen $T \in BC([0,1];\mathbb{R})$.

3. Man definiert für jedes $k \in \mathbb{N}$ die abzählbare Teilmenge $E_k \subset BC([0,1];\mathbb{R})$ als die Menge aller Polynome $P_k \in BC([0,1];\mathbb{R})$ k-ter Ordnung der Form

$$P_k u = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} u^\ell (1-u)^{k-\ell} g_{k\ell} \quad \text{für } u \in [0,1]$$

mit rationalen Koeffizienten $\{g_{k0}, g_{k1}, \ldots, g_{kk}\} \subset \mathbb{Q}$.

Für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ und $T \in BC([0,1];\mathbb{R})$ kann man aufgrund von Schritt 2 ein $k \in \mathbb{N}$ finden, so daß $\rho(T_k, T) \le \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Wählt man nun die rationalen Koeffizienten $\{g_{k0}, g_{k1}, \ldots, g_{kk}\} \subset \mathbb{Q}$ derart, daß $\max_{\ell \in \{0,1,\ldots,k\}} |Tu_{k\ell} - g_{k\ell}| \le \frac{\varepsilon}{2}$ gilt, dann erhält man wegen (1) die Abschätzung

$$|T_k u - P_k u| \le \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} u^\ell (1-u)^{k-\ell} |Tu_{k\ell} - g_{k\ell}| \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } u \in [0,1],$$

das heißt, $\rho(T_k, P_k) \le \frac{\varepsilon}{2}$ und somit $\rho(P_k, T) \le \varepsilon$. Damit ist gezeigt, daß die abzählbare Teilmenge $E = \cup_{k \in \mathbb{N}} E_k \subset BC([0,1];\mathbb{R})$ in $BC([0,1];\mathbb{R})$ dicht liegt und somit der metrische Raum $\big(BC([0,1];\mathbb{R}), \rho\big)$ separabel ist.

4. Um einzusehen, daß der metrische Raum $\big(BC(\mathbb{R};\mathbb{R}), \rho\big)$ *nicht* separabel ist, sei eine beliebige abzählbare Teilmenge $E = \{T_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset \big(BC(\mathbb{R};\mathbb{R}), \rho\big)$ gegeben. Mit deren Hilfe konstruiert man eine Folge $\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset \{-1, 1\}$ von Vorzeichen

$$g_k = \begin{cases} 1 & \text{falls } T_k k < 0 \text{ für } k \in \mathbb{Z}, \\ -1 & \text{falls } T_k k \ge 0 \text{ für } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Durch die stückweise affine Fortsetzung

$$Tu = (k-u)g_{k-1} + (u-k+1)g_k \quad \text{für } u \in (k-1,k] \text{ und } k \in \mathbb{Z}$$

erhält man eine Abbildung $T \in BC(\mathbb{R};\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft

$$|Tk - T_k k| = |g_k - T_k k| \geq 1 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z},$$

woraus sich $\rho(T, T_k) \geq 1$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ ergibt. Damit ist gezeigt, daß keine abzählbare Teilmenge E dicht in $\big(BC(\mathbb{R};\mathbb{R}), \rho\big)$ sein kann. $\square$