Übungsaufgaben 4

Banach-Räume

Aufgabe 1. Sei $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ und $(\ell^p, \|\ \|_p)$ der lineare normierte Raum aller Zahlenfolgen $u = \{x_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$, auf dem durch $\|u\|_p^p = \sum_{\ell=1}^{\infty} |x_\ell|^p$ eine Norm definiert wird.

1. Man weise nach, daß $(\ell^p, \|\ \|_p)$ vollständig und separabel ist!

2. Man zeige, daß eine Teilmenge K genau dann relativ kompakt in ℓ^p ist, wenn K in ℓ^p beschränkt ist und für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $\sum_{\ell=k+1}^{\infty} |x_\ell|^p \leq \varepsilon^p$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$ sowie jedes $\{x_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \in K$ gilt! ⑧

Lösung. 1. Zum Beweis der Vollständigkeit sei $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\ell^p, \|\ \|_p)$ mit den Gliedern $u_k = \{x_{k\ell}\}_{\ell \in \mathbb{N}} \in \ell^p$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$|x_{k\ell} - x_{m\ell}|^p \leq \sum_{\ell=1}^{r} |x_{k\ell} - x_{m\ell}|^p \leq \varepsilon^p$$

für alle $\ell, r, k, m \in \mathbb{N}$ mit $k, m \geq k_0$ gilt. Damit ist die Folge $\{x_{m\ell}\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ der ℓ-ten Folgeglieder für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ als Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$ konvergent. Somit existiert eine Folge $u = \{x_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ von Grenzwerten, so daß $\lim_{m \to \infty} |x_{m\ell} - x_\ell| = 0$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ gilt. Daher liefert der Grenzübergang $m \to \infty$ in der obigen Abschätzung

$$\sum_{\ell=1}^{r} |x_{k\ell} - x_\ell|^p \leq \varepsilon^p \quad \text{für alle } r, k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \geq k_0.$$

Daraus folgt $\|u_k - u\|_p^p = \sum_{\ell=1}^{\infty} |x_{k\ell} - x_\ell|^p \leq \varepsilon^p$ und somit $u_k - u \in \ell_p$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$. Wegen $u_{k_0} \in \ell^p$ ergibt sich $u = (u - u_{k_0}) + u_{k_0} \in \ell^p$. Damit konvergiert die Cauchy-Folge $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ in $(\ell^p, \|\ \|_p)$ gegen den Grenzwert $u \in \ell^p$, das heißt, $(\ell^p, \|\ \|_p)$ ist ein Banach-Raum.

2. Um zu zeigen, daß der Banach-Raum $(\ell^p, \|\ \|_p)$ für $p \in [1, \infty)$ separabel ist, definiert man $Q = \mathbb{Q}$ im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $Q = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in \mathbb{Q}, \operatorname{Im} z \in \mathbb{Q}\}$ im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. In beiden Fällen liegt Q in $\mathbb{K}$ dicht. Man betrachtet die Menge $q \subset \ell^p$ aller Zahlenfolgen $v = \{y_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \in \ell^p$, so daß $y_\ell \in Q$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ gilt sowie deren abzählbare Teilmenge $q_0 \subset q$ der Zahlenfolgen $w = \{z_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \in q$, für die ein $\ell_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $z_\ell = 0$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell > \ell_0$ gilt.

Seien $\varepsilon > 0$ und eine Folge $u = \{x_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \in \ell^p$ vorgegeben. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $2\sum_{\ell=k+1}^{\infty} |x_\ell|^p \leq \varepsilon^p$. Da Q in $\mathbb{K}$ dicht liegt, findet man eine Folge $w = \{z_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \in q_0$ mit $2\sum_{\ell=1}^{k} |x_\ell - z_\ell|^p \leq \varepsilon^p$, so daß $z_\ell = 0$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell > k$ gilt. Insgesamt folgt

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} |x_\ell - z_\ell|^p = \sum_{\ell=1}^{k} |x_\ell - z_\ell|^p + \sum_{\ell=k+1}^{\infty} |x_\ell|^p \leq \varepsilon^p$$

und somit $\|u - w\|_p \leq \varepsilon$. Folglich ist die abzählbare Menge q_0 dicht in $(\ell^p, \|\ \|_p)$.

3. Zunächst definiert man für jedes $k \in \mathbb{N}$ die linearen Abbildungen $T_k : \ell^p \to \ell^p$ und $R_k : \ell^p \to \ell^p$, die jeder Folge $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ die Folgen $T_k u = \{y_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ und $R_k u = \{z_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ wie folgt zuordnen:

$$y_\ell = \begin{cases} x_\ell & \text{für } \ell \in \{1,\dots,k\}, \\ 0 & \text{für } \ell \in \mathbb{N}, \ell > k, \end{cases} \qquad z_\ell = \begin{cases} 0 & \text{für } \ell \in \{1,\dots,k\}, \\ x_\ell & \text{für } \ell \in \mathbb{N}, \ell > k. \end{cases}$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt $u = R_k u + T_k u$ sowie

$$\|T_k u\|_p^p = \textstyle\sum_{\ell=1}^\infty |y_\ell|^p = \sum_{\ell=1}^k |y_\ell|^p = \sum_{\ell=1}^k |x_\ell|^p \le \sum_{\ell=1}^\infty |x_\ell|^p = \|u\|_p^p,$$
$$\|R_k u\|_p^p = \textstyle\sum_{\ell=1}^\infty |z_\ell|^p = \sum_{\ell=k+1}^\infty |z_\ell|^p = \sum_{\ell=k+1}^\infty |x_\ell|^p \le \sum_{\ell=1}^\infty |x_\ell|^p = \|u\|_p^p.$$

4. Sei K eine relativ kompakte Teilmenge von ℓ^p. Dann ist K auch beschränkt in ℓ^p. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig fixiert. Nach dem Hausdorff-Kriterium kann man ein endliches $\frac{\varepsilon}{3}$-Netz $\{u_1,\dots,u_n\} \subset \ell^p$ für K finden. Sei $u \in K$ beliebig gegeben und $m \in \{1,\dots,n\}$ ein Index mit $\|u_m - u\|_p \le \frac{\varepsilon}{3}$. Dann gilt wegen der Linearität der Abbildung $T_k : \ell^p \to \ell^p$ und der Normabschätzungen in Schritt 3 die Beziehung

$$\|u - T_k u\|_p \le \|u - u_m\|_p + \|u_m - T_k u_m\|_p + \|T_k u_m - T_k u\|_p \le 2\|u - u_m\|_p + \|R_k u_m\|_p$$

und somit $\|R_k u\|_p \le 2\|u_m - u\|_p + \|R_k u_m\|_p$. Da wegen $u_m \in \ell^p$ stets die Konvergenzeigenschaft $\lim_{k\to\infty} \|R_k u_m\|_p = 0$ erfüllt ist, kann man ein $k_m \in \mathbb{N}$ finden, so daß $\|R_k u_m\|_p \le \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $k \in \mathbb{N}, k \ge k_m$ gilt. Mit $\|u_m - u\|_p \le \frac{\varepsilon}{3}$ folgt daraus

$$\|R_k u\|_p \le 2\|u_m - u\|_p + \|R_k u_m\|_p \le \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, k \ge k_m.$$

Wählt man $k_0 = \max\{k_1, \dots k_n\} \in \mathbb{N}$, dann ergibt sich schließlich

$$\textstyle\sum_{\ell=k+1}^\infty |x_\ell|^p = \|R_k u\|_p^p \le \varepsilon^p \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, k \ge k_0 \text{ und jedes } u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in K.$$

5. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Unter den Voraussetzungen, daß einerseits eine Konstante $c \ge 0$ existiert, so daß $\sum_{\ell=1}^\infty |x_\ell|^p \le c^p$ für jedes $\{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in K$ gilt und andererseits ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $\sum_{\ell=k+1}^\infty |x_\ell|^p \le \varepsilon^p$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \ge k_0$ sowie jedes $\{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in K$ gilt, wird gezeigt, daß $T_{k_0}[K]$ ein in ℓ^p relativ kompaktes ε-Netz für K ist:

Sei dazu $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge von Elementen $v_m = \{y_{m\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in T_{k_0}[K]$. Dann gibt es eine Folge $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ von Elementen $u_m = \{x_{m\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in K$, so daß $v_m = T_{k_0} u_m \in T_{k_0}[K]$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt. Nach Voraussetzung ergibt sich die Abschätzung

$$\textstyle\sum_{\ell=1}^{k_0} |y_{m\ell}|^p = \sum_{\ell=1}^{k_0} |x_{m\ell}|^p \le c^p \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Somit ist die Folge $\{y_{m\ell}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ der ℓ-ten Folgeglieder für jedes $\ell \in \{1,\dots,k_0\}$ in $\mathbb{K}$ beschränkt, besitzt also nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß einen Häufungspunkt in $\mathbb{K}$. Man kann daher eine wachsende Folge $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ finden, so daß die Teilfolge $\{y_{m_n\ell}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ für jeden der endlich vielen Indizes $\ell \in \{1,\dots,k_0\}$ in $\mathbb{K}$ konvergiert. Da außerdem $y_{m\ell} = 0$ für alle $m,\ \ell \in \mathbb{N},\ \ell > k_0$ gilt, konvergiert die Folge $\{v_{m_n}\}_{m\in\mathbb{N}}$ in ℓ^p, das heißt, $T_{k_0}[K]$ ist relativ kompakt in ℓ^p.

Da für jede Folge $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in K$ die Folgen $T_{k_0}u = \{y_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in T_{k_0}[K]$ und $R_{k_0}u = \{z_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in R_{k_0}[K]$ die Beziehung $u = T_{k_0}u + R_{k_0}u$ erfüllen, ergibt sich nach Voraussetzung

$$\|u - T_{k_0}u\|_p^p = \|R_{k_0}u\|_p^p = \textstyle\sum_{\ell=k_0+1}^{\infty} |z_\ell|^p = \sum_{\ell=k_0+1}^{\infty} |x_\ell|^p \le \varepsilon^p.$$

Damit ist $T_{k_0}[K]$ tatsächlich ein in ℓ^p relativ kompaktes ε-Netz für K, woraus sich die relative Kompaktheit von K in ℓ^p ergibt. □

Aufgabe 2. Sei $\left\{\sum_{\ell=1}^{k} u_\ell\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine im Banach-Raum $(V, \|\ \ \|)$ absolut konvergente Reihe mit den Gliedern der Folge $\{u_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset V$. Sei ferner $\varphi : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$ und $\{v_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset V$ die umgeordnete Folge, die durch $v_\ell = u_{\varphi(\ell)}$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ definiert wird. Man beweise, daß die Reihe $\left\{\sum_{\ell=1}^{k} v_\ell\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ ebenfalls in $(V, \|\ \ \|)$ absolut konvergiert und die Grenzwerte $\sum_{\ell=1}^{\infty} u_\ell = \sum_{\ell=1}^{\infty} v_\ell \in V$ übereinstimmen! ④

Lösung. 1. Bildet man für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Indexmenge $J_k = \{\varphi(1),\dots,\varphi(k)\} \subset \mathbb{N}$ und betrachtet ihren maximalen Index $m_k = \max J_k \in \mathbb{N}$, dann gilt offenbar die Abschätzung

$$\textstyle\sum_{\ell=1}^{k} \|v_\ell\| = \sum_{\ell=1}^{k} \|u_{\varphi(\ell)}\| \le \sum_{\ell=1}^{m_k} \|u_\ell\| \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Da wegen der absoluten Konvergenz der Reihe $\left\{\sum_{\ell=1}^{k} u_\ell\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $(V, \|\ \ \|)$ auch die Reihe $\left\{\sum_{\ell=1}^{k} \|u_\ell\|\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert, folgt daraus

$$\textstyle\sum_{\ell=1}^{k} \|v_\ell\| \le \sum_{\ell=1}^{\infty} \|u_\ell\| \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Somit ist die Reihe $\left\{\sum_{\ell=1}^{k} \|v_\ell\|\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine nach oben beschränkte, monoton wachsende Folge in $\mathbb{R}$, die somit in $\mathbb{R}$ konvergiert. Daraus folgt die absolute Konvergenz der Reihe $\left\{\sum_{\ell=1}^{k} v_\ell\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $(V, \|\ \ \|)$.

2. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig fixiert. Nach dem Cauchy-Kriterium kann man wegen der absoluten Konvergenz der Reihe $\left\{\sum_{\ell=1}^{k} u_\ell\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $(V, \|\ \ \|)$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ finden, so daß

$$\textstyle\sum_{\ell=1}^{k+p} \|u_\ell\| - \sum_{\ell=1}^{k} \|u_\ell\| = \sum_{\ell=k+1}^{k+p} \|u_\ell\| \le \varepsilon \quad \text{für alle } k,\ p \in \mathbb{N} \text{ mit } k \ge k_0 \tag{2}$$

gilt. Definiert man die Indexmenge $I_0 = \{\varphi^{-1}(1),\dots,\varphi^{-1}(k_0)\} \subset \mathbb{N}$ sowie ihren maximalen Index $n_0 = \max I_0 \in \mathbb{N}$, dann folgt daraus

$$\textstyle\sum_{\ell=1}^{k_0} \|u_\ell\| = \sum_{\ell=1}^{k_0} \|v_{\varphi^{-1}(\ell)}\| \le \sum_{\ell=1}^{n_0} \|v_\ell\|. \tag{3}$$

Für alle $k, p \in \mathbb{N}$ mit $k \geq n_0$ ergibt sich aus den Abschätzungen (1) und (3) somit

$$\sum_{\ell=1}^{k+p} \|v_\ell\| - \sum_{\ell=1}^{k} \|v_\ell\| \leq \sum_{\ell=1}^{m_{k+p}} \|u_\ell\| - \sum_{\ell=1}^{n_0} \|v_\ell\| \leq \sum_{\ell=1}^{m_{k+p}} \|u_\ell\| - \sum_{\ell=1}^{k_0} \|u_\ell\|$$

und damit auch $m_{k+p} \geq k_0$. Wegen (2) erhält man daher auch die Abschätzung

$$\sum_{\ell=k+1}^{k+p} \|v_\ell\| = \sum_{\ell=1}^{k+p} \|v_\ell\| - \sum_{\ell=1}^{k} \|v_\ell\| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } k, p \in \mathbb{N} \text{ mit } k \geq n_0. \tag{4}$$

Darüberhinaus ist die Differenz

$$\sum_{\ell=1}^{n_0} v_\ell - \sum_{\ell=1}^{k_0} u_\ell = \sum_{\ell=1}^{n_0} u_{\varphi(\ell)} - \sum_{\ell=1}^{k_0} u_\ell = \sum_{\ell \in J_{n_0} \setminus \{1,\dots,k_0\}} u_\ell$$

wegen $I_0 = \{\varphi^{-1}(1), \dots, \varphi^{-1}(k_0)\} \subset \{1, \dots, n_0\}$ eine Summe von Gliedern $u_\ell \in V$ mit der Eigenschaft $\ell > k_0$, woraus wegen (2) folgende Abschätzung resultiert:

$$\left\|\sum_{\ell=1}^{n_0} v_\ell - \sum_{\ell=1}^{k_0} u_\ell\right\| = \left\|\sum_{\ell \in J_{n_0} \setminus \{1,\dots,k_0\}} u_\ell\right\| \leq \sum_{\ell \in J_{n_0} \setminus \{1,\dots,k_0\}} \|u_\ell\| \leq \varepsilon. \tag{5}$$

Die Beziehungen (2), (4) und (5) liefern für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$ und $k \geq n_0$ somit

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{\ell=1}^{k} v_\ell - \sum_{\ell=1}^{k} u_\ell\right\| &\leq \left\|\sum_{\ell=n_0+1}^{k} v_\ell\right\| + \left\|\sum_{\ell=1}^{n_0} v_\ell - \sum_{\ell=1}^{k_0} u_\ell\right\| + \left\|\sum_{\ell=k_0+1}^{k} u_\ell\right\| \\ &\leq \sum_{\ell=n_0+1}^{k} \|v_\ell\| + \left\|\sum_{\ell=1}^{n_0} v_\ell - \sum_{\ell=1}^{k_0} u_\ell\right\| + \sum_{\ell=k_0+1}^{k} \|u_\ell\| \leq 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Somit konvergieren die absolut konvergenten Reihen $\left\{\sum_{\ell=1}^{k} u_\ell\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ und $\left\{\sum_{\ell=1}^{k} v_\ell\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $(V, \|\ \|)$ gegen den gleichen Grenzwert $\sum_{\ell=1}^{\infty} u_\ell = \sum_{\ell=1}^{\infty} v_\ell \in V$. $\square$