Übungsaufgaben 5

Abgeschlossene lineare Teilräume

Aufgabe 1. Seien $(V, \| \ \|_V)$ und $(W, \| \ \|_W)$ zwei lineare normierte Räume über $\mathbb{K}$. Ist V endlichdimensional, so zeige man, daß jede lineare Abbildung $T : V \to W$ stetig ist. ③

Lösung. Sei $(V, \| \ \|_V)$ ein endlichdimensionaler linearer Raum der Dimension $\dim V = n$ und $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ eine Basis von V. Betrachtet man den durch

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k \quad \text{für } x \in \mathbb{K}^n$$

definierten linearen Homöomorphismus $A : \mathbb{K}^n \leftrightarrow V$, dann gilt offenbar für die Verkettung $TA : \mathbb{K}^n \to W$ mit der linearen Abbildung $T : V \to W$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$

$$TAx = \sum_{k=1}^{n} x_k T v_k \ \text{ und somit } \ \|TAx\|_W \le \sum_{k=1}^{n} |x_k| \|T v_k\|_W \le \sum_{k=1}^{n} \|T v_k\|_W \sup_{1 \le k \le n} |x_k|,$$

woraus sich die Stetigkeit der Abbildung $TA : \mathbb{K}^n \to W$ ergibt. Da $A : \mathbb{K}^n \leftrightarrow V$ ein Homöomorphismus ist, muß auch $T = (TA)A^{-1} : V \to W$ stetig sein. □

Aufgabe 2. Sind $(V, \| \ \|)$ ein linearer normierter Raum und V_0 ein echter linearer Teilraum von V, so beweise man folgende Aussagen:

1. Ist V_0 endlichdimensional, dann gibt es zu jedem $u \in V$ ein $u_0 \in V_0$ mit der Eigenschaft $\|u - u_0\| = \inf\{\|u - v\| : v \in V_0\}$.
2. Sei eine lineare stetige Abbildung $f : V \to \mathbb{K}$ vorgegeben, welche die Bedingung $\sup\{|\langle f, u\rangle| : u \in V, \ \|u\| \le 1\} = 1$ erfüllt. Ist $V_0 = \{u \in V : \langle f, u\rangle = 0\}$ die zugehörige abgeschlossene Hyperebene in V, so gilt $\inf\{\|u - v\| : v \in V_0\} = |\langle f, u\rangle|$ für jedes $u \in V$.
3. Ist V_0 abgeschlossen in V, dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $u \in V$ mit den Eigenschaften $\|u\| = 1$ und $\inf\{\|u - v\| : v \in V_0\} > 1 - \varepsilon$. ⑨

Lösung. 1. Sei V_0 ein endlichdimensionaler linearer Teilraum von V, $u \in V$ beliebig fixiert sowie $\delta = \inf\{\|u - v\| : v \in V_0\} \ge 0$. Dann gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $v_k \in V_0$ mit der Eigenschaft $\delta \le \|u - v_k\| \le 2^{-k} + \delta$. Aufgrund der Abschätzung

$$\|v_k\| \le \|v_k - u\| + \|u\| \le \delta + 2^{-k} + \|u\| \le \delta + 1 + \|u\| \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

liegt die Folge $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in der abgeschlossenen Kugel $K = \{v \in V_0 : \|v\| \le \delta + 1 + \|u\|\}$. Da der lineare Teilraum $(V_0, \| \ \|)$ von V endlichdimensional ist, muß die abgeschlossene Kugel K in $(V_0, \| \ \|)$ kompakt sein. Somit existiert eine Teilfolge $\{v_{k_\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ von $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, die in V gegen einen Grenzwert $u_0 \in K \subset V_0$ konvergiert. Führt man den Grenzübergang $k \to \infty$ in der Beziehung $\delta \leq \|u - v_k\| \leq 2^{-k} + \delta$ aus, so erhält man $\|u - u_0\| = \delta$.

2. Sei eine lineare stetige Abbildung $f : V \to \mathbb{K}$ vorgegeben, welche die Bedingung

$$\sup \big\{ |\langle f, w \rangle| : w \in V,\ \|w\| \leq 1 \big\} = 1 \tag{1}$$

erfüllt. Dann muß es einen Vektor $w \in V$ mit $\langle f, w \rangle \neq 0$ geben. Folglich ist die abgeschlossene Hyperebene $V_0 = \big\{ u \in V : \langle f, u \rangle = 0 \big\}$ in V ein echter linearer Teilraum von V, und es gilt $w \notin V_0$. Sei jetzt ein beliebiger Vektor $u \in V$, $u \notin V_0$ vorgegeben. Da das Komplement $V \setminus V_0$ offen ist, gibt eine offene Kugel $B(u, r) \subset V \setminus V_0$ mit dem Radius $r > 0$, das heißt, es gilt auch $\delta = \inf \big\{ \|u - v\| : v \in V_0 \big\}$ für ein $\delta \geq r > 0$.

Somit gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $v_k \in V_0$ mit der Eigenschaft $\delta \leq \|u - v_k\| \leq 2^{-k} + \delta$. Da $\langle f, w_k \rangle = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, ergibt sich wegen (1) die Abschätzung

$$|\langle f, u \rangle| = |\langle f, u - v_k \rangle| = \big|\big\langle f, \tfrac{u - v_k}{\|u - v_k\|} \big\rangle\big| \, \|u - v_k\| \leq \|u - v_k\| \leq 2^{-k} + \delta.$$

Daher liefert der Grenzübergang $k \to \infty$ die Beziehung $|\langle f, u \rangle| \leq \delta$.

Da andererseits offenbar auch die Identität

$$\begin{aligned} &\sup \big\{ |\langle f, w \rangle| : w \in V,\ \|w\| \leq 1 \big\} = \sup_{0 < r \leq 1} \sup \big\{ |\langle f, w \rangle| : w \in V,\ \|w\| = r \big\} \\ &= \sup_{0 < r \leq 1} \sup \big\{ |\langle f, r w \rangle| : w \in V,\ \|w\| = 1 \big\} = \sup_{0 < r \leq 1} r \sup \big\{ |\langle f, w \rangle| : w \in V,\ \|w\| = 1 \big\} \end{aligned}$$

gilt, ergibt sich aus (1) die äquivalente Bedingung

$$\sup \big\{ |\langle f, w \rangle| : w \in V,\ \|w\| = 1 \big\} = 1. \tag{2}$$

Somit gibt es wegen (2) zu jedem $\varepsilon \in (0, 1)$ ein $w \in V$ mit $w \notin V_0$, $\|w\| = 1$ und der Eigenschaft $\frac{1}{1+\varepsilon} \leq |\langle f, w \rangle| \leq 1$. Da wegen $u \in V$, $u \notin V_0$ stets $\langle f, u \rangle \neq 0$ gilt, kann man einen Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$ finden, so daß $\langle f, u \rangle = \langle f, \lambda w \rangle$ erfüllt ist, woraus sich offenbar $u - \lambda w \in V_0$ ergibt. Wegen der Definition des Abstands δ und der Wahl von $w \in V$ folgt

$$\delta \leq \|u - (u - \lambda w)\| = |\lambda| \|w\| = |\lambda| \leq |\lambda| (1+\varepsilon) |\langle f, w \rangle| = (1+\varepsilon) |\langle f, \lambda w \rangle| = (1+\varepsilon) |\langle f, u \rangle|$$

und somit schließlich auch $\delta \leq |\langle f, u \rangle|$ wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon \in (0, 1)$.

3. Sei V_0 ein echter und abgeschlossener linearer Teilraum von V. Dann ist das Komplement $V \setminus V_0$ offen und nicht leer, das heißt, es gibt eine offene Kugel $B(w, r) \subset V \setminus V_0$ mit dem Mittelpunkt $w \in V$, $w \notin V_0$ und dem Radius $r > 0$. Somit gilt auch die Beziehung $\delta = \inf \big\{ \|w - v\| : v \in V_0 \big\}$ für ein $\delta \geq r > 0$.

Wird $\varepsilon \in (0,1)$ beliebig vorgegeben, dann existiert folglich ein $v_0 \in V_0$, so daß die Ungleichungen $\delta \leq \|w - v_0\| \leq \frac{\delta}{1-\varepsilon}$ gelten. Somit erfüllt der Vektor $u = \frac{w-v_0}{\|w-v_0\|} \in V$ sowohl $\|u\| = 1$ als auch für alle $v \in V_0$ die Abschätzung

$$\|u - v\| = \left\| \frac{w-v_0}{\|w-v_0\|} - v \right\| = \frac{1}{\|w-v_0\|} \left\| w - (v_0 + \|w - v_0\| v) \right\| \geq \frac{\delta}{\|w-v_0\|} \geq 1 - \varepsilon$$

wegen der Wahl von $v_0 \in V_0$ und der Definition des Abstands δ. $\square$