Übungsaufgaben 7

Gleichgradig beschränkte Mengen

Aufgabe 1. Sei $(\ell^2, \|\ \ \|_2)$ der Banach-Raum aller Zahlenfolgen $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$, auf dem durch $\|u\|_2^2 = \sum_{\ell=1}^{\infty} |x_\ell|^2$ eine Norm definiert wird. Ist $v = \{z_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ eine Folge mit der Eigenschaft, daß für jede Folge $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ die Reihe $\big\{\sum_{\ell=1}^{k} \overline{z}_\ell x_\ell\big\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ konvergiert, so zeige man, daß dann auch $v = \{z_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ gilt! ④

Lösung. Sei $v = \{z_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ eine Folge derart, daß für jede Folge $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ die Reihe $\big\{\sum_{\ell=1}^{k} \overline{z}_\ell x_\ell\big\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ konvergiert. Definiert man für jedes $k \in \mathbb{N}$ das lineare Funktional $f_k : \ell^2 \to \mathbb{K}$ durch die k-te Partialsumme

$$\langle f_k, u\rangle = \sum_{\ell=1}^{k} \overline{z}_\ell x_\ell \quad \text{für } u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^2, \tag{1}$$

dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ und jedes $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ wegen der Ungleichung von Cauchy-Schwarz die Abschätzung

$$|\langle f_k, u\rangle|^2 = \Big|\sum_{\ell=1}^{k} \overline{z}_\ell x_\ell\Big|^2 \le \sum_{\ell=1}^{k} |z_\ell|^2 \sum_{\ell=1}^{k} |x_\ell|^2 \le \sum_{\ell=1}^{k} |z_\ell|^2 \|u\|_2^2,$$

woraus sich $f_k \in \mathscr{L}(\ell^2;\mathbb{K})$ sowie $\|f_k\|^2 \le \sum_{\ell=1}^{k} |z_\ell|^2$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ergibt.

Betrachtet man für jedes $k \in \mathbb{N}$ die durch die Vorschrift

$$z_{k\ell} = \begin{cases} z_\ell & \text{für } \ell \in \{1, \dots, k\}, \\ 0 & \text{für } \ell \in \mathbb{N}, \ell > k, \end{cases}$$

definierte Folge $v_k = \{z_{k\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, so erhält man andererseits wegen (1) die Beziehung

$$\|v_k\|_2^2 = \sum_{\ell=1}^{k} |z_\ell|^2 = \langle f_k, v_k\rangle \le \|f_k\| \|v_k\|_2$$

und somit auch $\sum_{\ell=1}^{k} |z_\ell|^2 \le \|f_k\|^2$, also insgesamt $\|f_k\|^2 = \sum_{\ell=1}^{k} |z_\ell|^2$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Da nach Voraussetzung die in (1) definierte Folge $\{\langle f_k, u\rangle\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ für jedes $u \in \ell^2$ konvergiert, ist die Folge $\{\|f_k\|^2\}_{k\in\mathbb{N}} = \big\{\sum_{\ell=1}^{k} |z_\ell|^2\big\}_{k\in\mathbb{N}}$ nach dem Satz von Banach-Steinhaus beschränkt, woraus sich $v = \{z_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ ergibt. □

Aufgabe 2. Sind $(V, \|\ \|_V)$ und $(W, \|\ \|_W)$ zwei separable Banach-Räume über $\mathbb{K}$ sowie $(V^*, \|\ \|_{V^*})$ und $(W^*, \|\ \|_{W^*})$ die mit den entsprechenden Normen

$$\|f\|_{V^*} = \sup\big\{|\langle f, u\rangle| : u \in V,\ \|u\|_V \leq 1\big\},$$
$$\|g\|_{W^*} = \sup\big\{|\langle g, w\rangle| : w \in W,\ \|w\|_W \leq 1\big\},$$

ausgestatteten (dualen) Banach-Räume $V^* = \mathcal{L}(V; \mathbb{K})$ und $W^* = \mathcal{L}(W; \mathbb{K})$ von Funktionalen, so beweise man die folgenden Aussagen:

1. Für jedes $u \in V$ gilt $\|u\|_V = \sup\big\{|\langle f, u\rangle| : f \in V^*,\ \|f\|_{V^*} \leq 1\big\}$.

2. Es gilt $\|T\| = \sup\big\{|\langle g, Tu\rangle| : g \in W^*,\ \|g\|_{W^*} \leq 1,\ u \in V,\ \|u\|_V \leq 1\big\}$ für jede Abbildung $T \in \mathcal{L}(V; W)$.

3. Hat die Teilmenge $M \subset \mathcal{L}(V; W)$ die Eigenschaft, daß die Menge $\{\langle g, Tu\rangle : T \in M\}$ für jedes Paar $(g, u) \in W^* \times V$ in $\mathbb{K}$ beschränkt ist, so ist M in $\mathcal{L}(V; W)$ beschränkt. ⑧

Lösung. 1. Sei $u \in V$ beliebig fixiert. Da $|\langle f, u\rangle| \leq \|f\|_{V^*}\|u\|_V$ für jedes Funktional $f \in V^* = \mathcal{L}(V; \mathbb{K})$ gilt, erhält man zunächst

$$\sup\big\{|\langle f, u\rangle| : f \in V^*,\ \|f\|_{V^*} \leq 1\big\} \leq \|u\|_V. \tag{2}$$

Da im Falle $u = 0$ nichts zu beweisen ist, kann man annehmen, daß $\|u\|_V > 0$ gilt. Der Trennungssatz liefert für den trivialen linearen Teilraum $V_0 = \{0\}$ des separablen Banach-Raums $(V, \|\ \|_V)$ die Existenz eines Funktionals $f_0 \in V^* = \mathcal{L}(V; \mathbb{K})$ mit $\|f_0\|_{V^*} = 1$ und $\langle f_0, u\rangle = \|u\|_V$. Daraus folgt wegen (2) die gewünschte Abschätzung

$$\|u\|_V = \langle f_0, u\rangle \leq \sup\big\{|\langle f, u\rangle| : f \in V^*,\ \|f\|_{V^*} \leq 1\big\} \leq \|u\|_V.$$

2. Sei $T \in \mathcal{L}(V; W)$ vorgegeben. Dann gilt $Tu \in W$ für jedes $u \in V$, und aufgrund von Schritt 1 ergibt sich im separablen Banach-Raum $(W, \|\ \|_W)$ die Beziehung

$$\|Tu\|_W = \sup\big\{|\langle g, Tu\rangle| : g \in W^*,\ \|g\|_{W^*} \leq 1\big\}.$$

Die Bildung des Supremums über alle $u \in V$ mit $\|u\|_V \leq 1$ liefert schließlich

$$\|T\| = \sup\big\{|\langle g, Tu\rangle| : g \in W^*,\ \|g\|_{W^*} \leq 1,\ u \in V,\ \|u\|_V \leq 1\big\}.$$

3. Sei $u \in V$ beliebig fixiert. Dann wird für jedes $T \in M$ vermöge

$$\langle h_T, g\rangle = \langle g, Tu\rangle \quad \text{für } g \in W^* \tag{3}$$

ein lineares Funktional $h_T : W^* \to \mathbb{K}$ definiert. Da $(W, \|\ \|_W)$ ein separabler Banach-Raum ist, folgt aufgrund von Schritt 1 die Beziehung

$$\|Tu\|_W = \sup\big\{|\langle g, Tu\rangle| : g \in W^*,\ \|g\|_{W^*} \leq 1\big\} \quad \text{für jedes } T \in M. \tag{4}$$

Wegen (3) und (4) gilt die Identität

$$\sup\left\{|\langle h_T, g\rangle| : g \in W^*,\ \|g\|_{W^*} \le 1\right\} = \|Tu\|_W \quad \text{für alle } T \in M, \tag{5}$$

woraus sich $h_T \in \mathcal{L}(W^*;\mathbb{K})$ für jedes $T \in M$ ergibt.

Da nach Voraussetzung die Menge $\left\{\langle h_T, g\rangle : T \in M\right\} = \left\{\langle g, Tu\rangle : T \in M\right\}$ für *jedes* $g \in W^*$ in $\mathbb{K}$ beschränkt ist, folgt aufgrund des Prinzips der gleichgradigen Beschränktheit, daß die Menge $\{h_T \in \mathcal{L}(W^*;\mathbb{K}) : T \in M\}$ in $\mathcal{L}(W^*;\mathbb{K})$ beschränkt ist, also wegen (5) auch die Beschränktheit der Menge $\{Tu \in W : T \in M\}$ in W.

Da $u \in V$ anfangs beliebig fixiert wurde, ist die Menge $\{Tu \in W : T \in M\}$ für *jedes* $u \in V$ in W beschränkt. Die erneute Anwendung des Prinzips der gleichgradigen Beschränktheit liefert schließlich, daß die Menge M in $\mathcal{L}(V; W)$ beschränkt ist. $\square$