Übungsaufgaben 8

# Dualität und punktweise Konvergenz

**Aufgabe 1.** Sei $(V, \| \ \|_V)$ ein separabler Banach-Raum über $\mathbb{K}$. Man konstruiere eine abzählbare Menge $E \subset V^*$ von Funktionalen mit der Eigenschaft, daß sich jedes $f \in V^*$ als Grenzwert einer punktweise konvergenten Folge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ darstellen läßt! ④

*Lösung.* 1. Da $(V, \| \ \|_V)$ separabel ist, gibt es eine Folge $\{v_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset V$ linear unabhängiger Vektoren mit $V = \operatorname{cl}\operatorname{lin}\{v_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$. Bildet man den abgeschlossenen linearen Teilraum

$$V_{k\ell} = \operatorname{lin}\big(\{v_1, \dots, v_k\} \setminus \{v_\ell\}\big) \quad \text{von} \quad V_k = \operatorname{lin}\{v_1, \dots, v_k\} \quad \text{für jedes } \ell \in \{1, \dots, k\},\ k \in \mathbb{N},$$

dann gilt wegen $v_\ell \notin V_{k\ell}$ stets $\delta_{k\ell} = \inf\big\{\|v_\ell - v\|_V : v \in V_{k\ell}\big\} > 0$. Der Trennungssatz liefert für jedes $\ell \in \{1, \dots, k\}$ ein $h_{k\ell} \in V_k^*$ mit $\delta_{k\ell}\|h_{k\ell}\|_{V_k^*} = 1$, $\langle h_{k\ell}, v_\ell\rangle = 1$ sowie $\langle h_{k\ell}, v\rangle = 0$ für alle $v \in V_{k\ell}$, also auch $\langle h_{k\ell}, v_m\rangle = \delta_{\ell m}$ für alle $\ell, m \in \{1, \dots, k\}$ sowie

$$\langle f, v\rangle = \textstyle\sum_{\ell=1}^k \langle f, v_\ell\rangle\langle h_{k\ell}, v\rangle \quad \text{für alle } f \in V^*,\ v \in V_k \text{ und } k \in \mathbb{N}.$$

2. Sei $Q = \mathbb{Q}$ im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sowie $Q = \big\{\beta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\beta \in \mathbb{Q},\ \operatorname{Im}\beta \in \mathbb{Q}\big\}$ im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Man betrachtet für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Teilmenge

$$G_k = \big\{g \in V_k^* : \langle g, v_\ell\rangle \in Q \ \text{ für alle } \ell \in \{1, \dots, k\}\big\} \ \text{ von } V^*.$$

Jedem Funktional $g \in G_k \subset \mathscr{L}(V_k; \mathbb{K})$ wird mit Hilfe des Satzes von Hahn-Banach eine Erweiterung $T_k g \in \mathscr{L}(V; \mathbb{K})$ mit $T_k g|V_k = g$ und $\|T_k g\|_{V^*} = \|g\|_{V_k^*}$ zugeordnet, wodurch die abzählbare Menge $E_k = T_k[G_k] \subset V^*$ von Funktionalen definiert wird, deren Vereinigung $E = \cup_{k\in\mathbb{N}} E_k \subset V^*$ ebenfalls abzählbar ist.

3. Sei ein Funktional $f \in V^*$ beliebig vorgegeben. Wegen Schritt 1 und 2 sowie der Dichtheit von $Q$ in $\mathbb{K}$ kann man für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein Funktional $f_k \in E_k$ finden, so daß

$$|\langle f_k - f, v_\ell\rangle| \le \tfrac{1}{k} \min\{1, \delta_{k\ell}\} \quad \text{für alle } \ell \in \{1, \dots, k\}.$$

Daraus ergibt sich aufgrund von Schritt 1 für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $v \in V_k$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\langle f_k, v\rangle| &\le |\langle f, v\rangle| + \textstyle\sum_{\ell=1}^k |\langle f_k - f, v_\ell\rangle||\langle h_{k\ell}, v\rangle| \\ &\le \|f\|_{V^*}\|v\|_V + \textstyle\sum_{\ell=1}^k \frac{1}{k}\, \delta_{k\ell}\|h_{k\ell}\|_{V_k^*}\|v\|_V \le \big(\|f\|_{V^*} + 1\big)\|v\|_V. \end{aligned}$$

Wegen Schritt 2 folgt daraus $\|f_k\|_{V^*} = \|f_k|V_k\|_{V_k^*} \le \|f\|_{V^*} + 1$, das heißt, $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ ist eine beschränkte Folge in $V^*$. Da außerdem $|\langle f_k - f, v_\ell\rangle| \le \frac{1}{k}$ für alle $\ell, k \in \mathbb{N}$ mit $k \ge \ell$ gilt, folgt wegen $V = \operatorname{cl}\operatorname{lin}\{v_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ und dem Satz von Banach-Steinhaus für Funktionale die punktweise Konvergenz der Folge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ gegen $f \in V^*$. □

**Aufgabe 2.** Seien $(V, \| \ \|_V)$ ein separabler Banach-Raum über $\mathbb{K}$ und $U \subset V$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von $V$, ferner $U^0$ der durch

$$U^0 = \big\{ f \in V^* : \langle f, u \rangle = 0 \ \text{ für alle } u \in U \big\}$$

definierte lineare Teilraum von $V^*$ sowie $g \in V^*$ ein beliebig vorgegebenes Funktional.

1. Man zeige, daß $\dim U^0 = \operatorname{codim} U$ gilt, falls $U$ von endlicher Codimension in $V$ ist!
2. Man beweise die Gültigkeit der folgenden Identität

$$\sup \big\{ |\langle g, u \rangle| : u \in U,\ \|u\|_V \leq 1 \big\} = \inf \big\{ \|f - g\|_{V^*} : f \in U^0 \big\}!$$

3. Man weise nach, daß stets ein Funktional $h \in U^0$ existiert, welches den Abstand

$$\|h - g\|_{V^*} = \inf \big\{ \|f - g\|_{V^*} : f \in U^0 \big\}$$

zwischen $g \in V^*$ und dem linearen Teilraum $U^0 \subset V^*$ realisiert! ⑧

*Lösung.* 1. Hat der abgeschlossene lineare Teilraum $U$ von $V$ die endliche Codimension $\operatorname{codim} U = n \in \mathbb{N}$, dann existiert ein endlichdimensionaler linearer Teilraum $W$ von $U$ mit $\dim W = n$, wobei die Summe $V = U + W$ topologisch direkt ist. Ist die Menge $\{u_1, \dots, u_n\} \subset W$ eine Basis von $W$, dann sind alle Basisvektoren linear unabhängig.

Sei $\ell \in \{1, \dots, n\}$ beliebig fixiert. Mit $U$ ist auch die Summe

$$V_\ell = U + \operatorname{lin} \big\{ u_k \in W : k \in \{1, \dots, n\},\ k \neq \ell \big\}$$

ein abgeschlossener linearer Teilraum von $V$. Somit gilt $\delta = \inf \big\{ \|u_\ell - v\|_V : v \in V_\ell \big\} > 0$ wegen $u_\ell \notin V_\ell$. Nach dem Trennungssatz gibt es ein Funktional $g_\ell \in V^*$ mit $\|g_\ell\|_V = \frac{1}{\delta}$, $\langle g_\ell, u_\ell \rangle = 1$ sowie $\langle g_\ell, v \rangle = 0$ für alle $v \in V_\ell$. Daraus folgt insbesondere

$$g_\ell \in U^0 \quad \text{sowie} \quad \langle g_\ell, u_k \rangle = \delta_{k\ell} \quad \text{für alle } k, \ell \in \{1, \dots, n\}.$$

Die Funktionale $g_1, \dots, g_n \in U^0$ sind linear unabhängig, denn aus $\sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell g_\ell = 0$ für $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ folgt stets $\alpha_k = \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell \langle g_\ell, u_k \rangle = 0$ für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$.

Sei $f \in U^0$ ein beliebiges Funktional. Da sich jedes $v \in V = U + W$ in der Form $v = u + \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k$ mit $u \in U$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ darstellen läßt, erhält man

$$\begin{aligned} \langle f, v \rangle &= \langle f, u \rangle + \textstyle\sum_{k=1}^n \alpha_k \langle f, u_k \rangle = \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_k \langle f, u_\ell \rangle \langle g_\ell, u_k \rangle \\ &= \big\langle \textstyle\sum_{\ell=1}^n \langle f, u_\ell \rangle g_\ell, u + \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k \big\rangle = \big\langle \sum_{\ell=1}^n \langle f, u_\ell \rangle g_\ell, v \big\rangle. \end{aligned}$$

Damit ist $f = \sum_{\ell=1}^n \langle f, u_\ell \rangle g_\ell$ eine Linearkombination der Funktionale $g_1, \dots, g_n \in U^0$, das heißt, es gilt $U^0 = \operatorname{lin}\{g_1, \dots, g_n\}$ sowie $\dim U^0 = n$.

2. Sei $g \in V^*$ beliebig vorgegeben. Da $\langle f, u \rangle = 0$ für alle $f \in U^0$ und $u \in U$ gilt, folgt

$$\begin{aligned}\sup\left\{|\langle g, u\rangle| : u \in U,\ \|u\|_V \leq 1\right\} &= \sup\left\{|\langle f - g, u\rangle| : u \in U,\ \|u\|_V \leq 1\right\} \\ &\leq \sup\left\{|\langle f - g, v\rangle| : v \in V,\ \|v\|_V \leq 1\right\} = \|f - g\|_{V^*},\end{aligned}$$

woraus sich durch Bildung des Infimums über $f \in U^0$ folgende Abschätzung ergibt:

$$\sup\left\{|\langle g, u\rangle| : u \in U,\ \|u\|_V \leq 1\right\} \leq \inf\left\{\|f - g\|_{V^*} : f \in U^0\right\}.$$

3. Ist $g_0 = g|U \in U^* = \mathcal{L}(U; \mathbb{K})$ die Einschränkung von $g \in V^* = \mathcal{L}(V; \mathbb{K})$ auf den linearen Teilraum $U$ von $V$, dann existiert nach dem Satz von Hahn-Banach eine Erweiterung $\tilde{g} \in V^* = \mathcal{L}(V; \mathbb{K})$ von $g_0$ mit $\tilde{g}|U = g_0$ und $\|\tilde{g}\|_{V^*} = \|g_0\|_{U^*}$. Aufgrund der Identität $\tilde{g}|U = g_0 = g|U$ gilt $g - \tilde{g} \in U^0$. Wegen der Beziehung

$$\|\tilde{g}\|_{V^*} = \|g_0\|_{U^*} = \sup\left\{|\langle g_0, u\rangle| : u \in U,\ \|u\|_V \leq 1\right\} = \sup\left\{|\langle g, u\rangle| : u \in U,\ \|u\|_V \leq 1\right\}$$

folgt daraus auch

$$\inf\left\{\|f - g\|_{V^*} : f \in U^0\right\} \leq \|(g - \tilde{g}) - g\|_{V^*} = \sup\left\{|\langle g, u\rangle| : u \in U,\ \|u\|_V \leq 1\right\}.$$

Mit Schritt 2 erhält man schließlich

$$\inf\left\{\|f - g\|_{V^*} : f \in U^0\right\} = \|h - g\|_{V^*} = \sup\left\{|\langle g, u\rangle| : u \in U,\ \|u\|_V \leq 1\right\}$$

für $h = g - \tilde{g} \in U^0$. $\square$