Übungsaufgaben 9

# Schwache Konvergenz und Reflexivität

**Aufgabe 1.** Sei $(V, \|\ \|_V)$ ein separabler Banach-Raum über $\mathbb{K}$. Konvergiert die Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ in $V$ schwach gegen den Grenzwert $u \in V$, so weise man nach, daß es eine Folge $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{lin}\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} \|v_k - u\|_V = 0$ gibt! ④

*Lösung.* 1. Sei $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ eine Folge, die schwach in $V$ gegen den Grenzwert $u \in V$ konvergiert, das heißt, es gelte $\lim_{k\to\infty}\langle f, u_k\rangle = \langle f, u\rangle$ für alle $f \in V^*$. Definiert man

$$N = \big\{ f \in V^* : \langle f, u_k\rangle = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}\big\},$$

so erhält man $\langle f, u\rangle = 0$ für alle $f \in N$.

2. Im Falle $V = \operatorname{cl}\operatorname{lin}\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ gibt es für den Grenzwert $u \in V$ stets eine konvergente Folge $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{lin}\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} \|v_k - u\|_V = 0$.

Anderenfalls ist $\operatorname{cl}\operatorname{lin}\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ein *echter* linearer Teilraum von $V$. Angenommen, es würde $u \notin \operatorname{cl}\operatorname{lin}\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ gelten. Die Abgeschlossenheit der Menge $\operatorname{cl}\operatorname{lin}\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $V$ hätte die Positivität des Abstands

$$\delta = \inf\big\{\|u - v\| : v \in \operatorname{cl}\operatorname{lin}\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}\big\} > 0$$

zur Folge. Nach dem Trennungssatz fände man ein Funktional $f \in V^*$ mit $\|f\| = 1$, $\langle f, u\rangle = \delta > 0$ sowie $\langle f, v\rangle = 0$ für alle $v \in \operatorname{cl}\operatorname{lin}\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, also ein Funktional $f \in N$ mit $\langle f, u\rangle > 0$ im Widerspruch zu Schritt 1. Somit gilt $u \in \operatorname{cl}\operatorname{lin}\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, das heißt, es existiert eine konvergente Folge $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{lin}\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} \|v_k - u\|_V = 0$. □

**Aufgabe 2.** Sei $p \in (1,\infty)$ und $(\ell^p, \|\ \|_p)$ der separable Banach-Raum aller Zahlenfolgen $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$, auf dem durch $\|u\|_p^p = \sum_{\ell=1}^\infty |x_\ell|^p$ eine Norm definiert wird.

1. Sei $q \in (1,\infty)$ durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gegeben. Man beweise, daß durch die Vorschrift

$$\langle T_q v, u\rangle = \textstyle\sum_{\ell=1}^\infty \bar{z}_\ell x_\ell \quad \text{für alle } v \in \{z_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^q,\ u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^p,$$

eine konjugiert-lineare Isometrie $T_q : \ell^q \leftrightarrow (\ell^p)^*$ definiert wird!

2. Man zeige, daß der Banach-Raum $(\ell^p, \|\ \|_p)$ reflexiv ist!

3. Man weise nach, daß eine Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \ell^p$ mit den Gliedern $u_k = \{x_{k\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ genau dann schwach in $\ell^p$ gegen den Grenzwert $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ konvergiert, wenn die Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $\ell^p$ beschränkt ist und $\lim_{k\to\infty} |x_{k\ell} - x_\ell| = 0$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ gilt! ⑧

*Lösung.* 1. Die Folge $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \ell^p$ mit den normierten Gliedern $e_k = \{\delta_{k\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ ist eine Schauder-Basis in $\ell^p$: Für jedes $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ und $\varepsilon > 0$ gibt es nämlich ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k, m \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$ die Beziehung

$$\left\| \sum_{\ell=1}^{k+m} x_\ell e_\ell - \sum_{\ell=1}^{k} x_\ell e_\ell \right\|_p = \left\| \sum_{\ell=k+1}^{k+m} x_\ell e_\ell \right\|_p \leq \sum_{\ell=k+1}^{k+m} |x_\ell|^p \leq \varepsilon^p$$

gilt, das heißt, die Reihe $\left\{\sum_{\ell=1}^{k} x_\ell e_\ell\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\ell^p$ gegen $u = \sum_{\ell=1}^{\infty} x_\ell e_\ell \in \ell^p$, wobei diese Darstellung eindeutig bestimmt ist.

Sei $f \in (\ell^p)^*$ ein beliebig vorgegebenes Funktional. Da die Reihe $\left\{\sum_{\ell=1}^{k} x_\ell e_\ell\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $\ell^p$ gegen $u = \sum_{\ell=1}^{\infty} x_\ell e_\ell \in \ell^p$ konvergiert, erhält man die Beziehung

$$\langle f, u\rangle = \lim_{k\to\infty} \left\langle f, \sum_{\ell=1}^{k} x_\ell e_\ell \right\rangle = \lim_{k\to\infty} \sum_{\ell=1}^{k} \langle f, e_\ell\rangle x_\ell = \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle f, e_\ell\rangle x_\ell. \tag{1}$$

Konstruiert man $u_m = \{x_{m\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ durch die Vorschrift

$$x_{m\ell} = \begin{cases} |\langle f, e_\ell\rangle|^{q-2}\, \overline{\langle f, e_\ell\rangle} & \text{für } \ell \in \{1, \ldots, m\}, \\ 0 & \text{für } \ell \in \mathbb{N}, \ell > m, \end{cases}$$

dann erhält man eine Folge $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \in \ell^p$, für die vermöge der Darstellung (1) sowohl

$$\langle f, u_m\rangle = \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle f, e_\ell\rangle x_{m\ell} = \sum_{\ell=1}^{m} |\langle f, e_\ell\rangle|^q$$

und wegen $(q-1)p = q$ auch die Beziehung

$$|\langle f, u_m\rangle|^p \leq \|f\|^p \|u_m\|_p^p = \|f\|^p \sum_{\ell=1}^{m} |\langle f, e_\ell\rangle|^{(q-1)p} = \|f\|^p \sum_{\ell=1}^{m} |\langle f, e_\ell\rangle|^q$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt, woraus sich wegen $(p-1)q = p$ zunächst

$$\left(\sum_{\ell=1}^{m} |\langle f, e_\ell\rangle|^q\right)^p \leq \|f\|^p \sum_{\ell=1}^{m} |\langle f, e_\ell\rangle|^q \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}$$

und damit $\sum_{\ell=1}^{\infty} |\langle f, e_\ell\rangle|^q \leq \|f\|^q$, also $\{\langle f, e_\ell\rangle\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \ell^q$ ergibt.

Andererseits folgt aus der Darstellung (1) und der Hölder-Ungleichung

$$|\langle f, u\rangle|^q = \left|\sum_{\ell=1}^{\infty} \langle f, e_\ell\rangle x_{m\ell}\right|^q \leq \|u\|_p^q \sum_{\ell=1}^{\infty} |\langle f, e_\ell\rangle|^q \quad \text{für alle } u \in \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^p,$$

also auch $\|f\|^q \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} |\langle f, e_\ell\rangle|^q$ und somit insgesamt die Normidentität

$$\|f\|^q = \sum_{\ell=1}^{\infty} |\langle f, e_\ell\rangle|^q \quad \text{für jedes } f \in (\ell^p)^*. \tag{2}$$

Umgekehrt wird für jede Folge $v = \{z_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^q$ ein Funktional $f \in (\ell^p)^*$ durch

$$\langle f, u\rangle = \sum_{\ell=1}^{\infty} \overline{z}_\ell x_\ell \quad \text{für alle } u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^p \tag{3}$$

definiert, denn die Hölder-Ungleichung liefert $|\langle f, u\rangle| \le \|v\|_q \|u\|_p$ für alle $u \in \ell^p$. Mit der Darstellung (1) folgt daraus die Identität

$$\textstyle\sum_{\ell=1}^{\infty} \langle f, e_\ell\rangle x_\ell = \sum_{\ell=1}^{\infty} \overline{z}_\ell x_\ell \quad \text{für alle } u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^p.$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ergibt sich $\langle f, e_k\rangle = \overline{z}_k$ für $u = e_k \in \ell^p$ und folglich wegen (2)

$$\|f\|^q = \textstyle\sum_{\ell=1}^{\infty} |\langle f, e_\ell\rangle|^q = \sum_{\ell=1}^{\infty} |z_\ell|^q = \|v\|_q^q, \tag{4}$$

mit anderen Worten, definiert die Zuordnung $v \mapsto f$ eine (bijektive) isometrische Abbildung $T_q : \ell^q \leftrightarrow (\ell^p)^*$, die wegen $T_q(\alpha v + \mu w) = \overline{\alpha} T_q v + \overline{\mu} T_q w$ für alle $\alpha$, $\mu \in \mathbb{K}$ sowie $v$, $w \in \ell^q$ eine konjugiert-lineare Abbildung ist.

2. Aufgrund von Schritt 1 und (3) erhält man zwischen den isometrischen Abbildungen $T_q : \ell^q \leftrightarrow (\ell^p)^*$ und $T_p : \ell^p \leftrightarrow (\ell^q)^*$ den Zusammenhang

$$\langle T_q v, u\rangle = \textstyle\sum_{\ell=1}^{\infty} \overline{z}_\ell x_\ell = \overline{\sum_{\ell=1}^{\infty} \overline{x}_\ell z_\ell} = \overline{\langle T_p u, v\rangle} \tag{5}$$

für alle $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^p$, $v = \{z_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^q$.

Sei ein Element $h \in (\ell^q)^{**}$ des bidualen Raums von $\ell^q$ beliebig fixiert. Dann wird durch

$$\langle f, u\rangle = \overline{\langle h, T_p u\rangle} \quad \text{für } u \in \ell^p$$

wegen der Stetigkeit der konjugiert-linearen Isometrie $T_p : \ell^p \leftrightarrow (\ell^q)^*$ ein lineares stetiges Funktional $f \in (\ell^p)^*$ definiert. Wegen (5) ergibt sich für $v = T_q^{-1} f \in \ell^q$ folglich

$$\langle f, u\rangle = \langle T_q v, u\rangle = \overline{\langle T_p u, v\rangle} = \overline{\langle J_q v, T_p u\rangle} \quad \text{für alle } u \in \ell^p,$$

wobei $J_q \in \mathcal{L}(\ell^q; (\ell^q)^{**})$ die isometrische Einbettung von $\ell^q$ in den bidualen Raum $(\ell^q)^{**}$ ist, das heißt, man erhält $\langle h, T_p u\rangle = \langle J_q v, T_p u\rangle$ für alle $u \in \ell^p$. Da $T_p : \ell^p \leftrightarrow (\ell^q)^*$ bijektiv ist und somit $T_p[\ell^p] = (\ell^q)^*$ gilt, folgt daraus $h = J_q v \in (\ell^q)^{**}$. Damit ist die Surjektivität von $J_q \in \mathcal{L}(\ell^q; (\ell^q)^{**})$ und somit die Reflexivität von $(\ell^q, \|\ \|_q)$ bewiesen.

3. Nach Schritt 1 ist $D = \{e_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \ell^q$ eine Schauder-Basis von $\ell^q$, das heißt, es gilt $\ell^q = \operatorname{cl}\operatorname{lin} D$. Mit Hilfe der bijektiven isometrischen Abbildung $T_q : \ell^q \leftrightarrow (\ell^p)^*$ ergibt sich für das isometrische Bild $E = T_q[D] = \{T_q e_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset (\ell^p)^*$ folglich $(\ell^p)^* = \operatorname{cl}\operatorname{lin} E$.

Der Satz von Banach-Steinhaus liefert das Kriterium, daß eine Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \ell^p$ mit den Gliedern $u_k = \{x_{k\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ genau dann schwach in $\ell^p$ gegen den Grenzwert $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ konvergiert, wenn die Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $\ell^p$ beschränkt ist und

$$\lim_{k\to\infty} \langle f, u_k\rangle = \langle f, u\rangle \quad \text{für alle } f \in E \text{ gilt.}$$

Die zweite Bedingung ist wegen $E = \{T_q e_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset (\ell^q)^*$ sowie $\langle T_q e_m, u\rangle = x_m$ und $\langle T_q e_m, u_k\rangle = x_{km}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gleichbedeutend zu

$$\lim_{k\to\infty} x_{km} = \lim_{k\to\infty} \langle T_q e_m, u_k\rangle = \langle T_q e_m, u\rangle = x_m \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N},$$

womit der Beweis erbracht ist. □