Vorlesung 1

# Metrische Räume und Vollständigkeit

**Metrische Räume.** Ein Paar $(X, \rho)$ heißt *metrischer Raum*, wenn auf einer nichtleeren Menge $X$ eine *Metrik* $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ definiert ist, das heißt, für alle $u, v, w \in X$ folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Positivität: Es gilt $\rho(u, v) \geq 0$ sowie nur dann $\rho(u, v) = 0$, wenn $u = v$ ist.
2. Symmetrie: Es gilt $\rho(u, v) = \rho(v, u)$.
3. Dreiecksungleichung: Es gilt $\rho(u, v) \leq \rho(u, w) + \rho(w, v)$.

**Offene und abgeschlossene Mengen.** Sei $(X, \rho)$ ein metrischer Raum und $E \subset X$.

1. Die Menge $B(u, r) = \{v \in X : \rho(u, v) < r\}$ wird als *offene Kugel* mit dem *Mittelpunkt* $u \in X$ und dem *Radius* $r > 0$ bezeichnet.

2. Ein Punkt $u \in X$ wird *innerer Punkt von* $E$ genannt, wenn eine offene Kugel $B(u, r) \subset X$ mit $B(u, r) \subset E$ existiert. Die Menge

$$\operatorname{int} E = \{u \in X : B(u, r) \subset E \text{ für ein } r > 0\} \subset E$$

aller inneren Punkte von $E$ heißt *Inneres von* $E$. Man bezeichnet die Menge $E$ als *offene Teilmenge von* $X$, wenn $E = \operatorname{int} E$ gilt.

3. Man nennt einen Punkt $u \in X$ *äußeren Punkt von* $E$, wenn er innerer Punkt des Komplements $X \setminus E$ ist. Die Menge

$$\operatorname{ext} E = \operatorname{int}(X \setminus E) = \{u \in X : B(u, r) \subset X \setminus E \text{ für ein } r > 0\} \subset X \setminus E$$

aller äußeren Punkte von $E$ heißt *Äußeres von* $E$.

4. Ein Punkt $u \in X$ wird *Berührungspunkt von* $E$ genannt, wenn jede offene Kugel $B(u, r) \subset X$ einen nichtleeren Durchschnitt mit $E$ hat. Die Menge

$$\operatorname{cl} E = \{u \in X : B(u, r) \cap E \neq \varnothing \text{ für alle } r > 0\} \supset E$$

aller Berührungspunkte von $E$ heißt *Abschließung von* $E$. Man bezeichnet $E$ als *abgeschlossene Teilmenge von* $X$, wenn $E = \operatorname{cl} E$ gilt.

5. Die Menge $K(u, r) = \{v \in X : \rho(u, v) \leq r\}$ wird als *abgeschlossene Kugel* mit dem *Mittelpunkt* $u \in X$ und dem *Radius* $r > 0$ bezeichnet.

6. Man nennt einen Punkt $u \in X$ *Randpunkt von* $E$, wenn er sowohl Berührungspunkt von $E$ als auch vom Komplement $X \setminus E$ ist. Die Menge

$$\operatorname{bd} E = \operatorname{cl} E \cap \operatorname{cl}(X \setminus E)$$

heißt *Rand von* $E$.

**Topologische Eigenschaften.** Für jede Teilmenge $E \subset X$ gilt:

1. Der Durchschnitt einer endlichen Anzahl sowie die Vereinigung einer beliebigen Familie offener Mengen ist eine offene Menge.
2. Für jede offene Menge $G \subset X$ folgt aus $G \subset E$ stets $G \subset \operatorname{int} E$.
3. Die Vereinigung einer endlichen Anzahl sowie der Durchschnitt einer beliebigen Familie abgeschlossener Mengen ist eine abgeschlossene Menge.
4. Für jede abgeschlossene Menge $F \subset X$ folgt aus $F \supset E$ stets $F \supset \operatorname{cl} E$.
5. Die Menge $E$ ist genau dann offen, wenn $X \setminus E$ abgeschlossen ist.
6. Die Menge $E$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $X \setminus E$ offen ist.
7. Für das Äußere von $E$ gilt $\operatorname{ext} E = \operatorname{int}(X \setminus E) = X \setminus \operatorname{cl} E$.
8. Für den Rand von $E$ gilt $\operatorname{bd} E = \operatorname{cl} E \setminus \operatorname{int} E$.
9. Der ganze Raum ist die disjunkte Vereinigung $X = \operatorname{int} E \cup \operatorname{bd} E \cup \operatorname{ext} E$.

**Basen offener Mengen.** Eine Familie $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset X$ nichtleerer offener Mengen heißt *Basis* für die offenen Mengen eines metrischen Raums $(X, \rho)$, wenn jede nichtleere offene Teilmenge von $X$ Vereinigung einer Teilfamilie von $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset X$ ist.

**System offener Kugeln.** Das System $\mathfrak{B} = \{B(u, r) \subset X : u \in X,\ r > 0\}$ der offenen Kugeln bildet in jedem metrischen Raum $(X, \rho)$ eine Basis für die offenen Mengen.

*Beweis.* Ist $G$ eine nichtleere offene Teilmenge von $X$, so betrachtet man die Teilfamilie $\mathfrak{A} = \{B \in \mathfrak{B} : B \subset G\}$ und bildet deren Vereinigung $E = \cup_{B\in\mathfrak{A}} B \subset G$. Da es für jeden Punkt $u \in G$ eine offene Kugel $B(u, r) \subset X$ mit $B(u, r) \subset G$, also $B(u, r) \in \mathfrak{A}$ gibt, ergibt sich $u \in E$ und somit auch $G \subset E$. □

**Metrische Teilräume.** Ist $(X, \rho)$ ein metrischer Raum und $X_0 \subset X$ eine nichtleere Menge, so heißt $(X_0, \rho_0)$ *metrischer Teilraum* mit *induzierter* Metrik $\rho_0 = \rho | X_0 \times X_0$.

**Topologische Eigenschaften.** Für jede Teilmenge $E_0 \subset X_0$ gilt:

1. Die Menge $E_0$ ist genau dann offen in $X_0$, wenn eine in $X$ offene Menge $E \subset X$ existiert, so daß $E_0 = E \cap X_0$ gilt.
2. Die Menge $E_0$ ist genau dann abgeschlossen in $X_0$, wenn es eine in $X$ abgeschlossene Menge $E \subset X$ gibt, so daß $E_0 = E \cap X_0$ gilt.

**Beschränkte Teilmengen.** Ist $(X, \rho)$ ein metrischer Raum, so wird der *Durchmesser* einer Menge $E \subset X$ durch $\operatorname{diam}(E) = \sup_{u\in E, v\in E} \rho(u, v)$ definiert. Man nennt eine Teilmenge $E \subset X$ *beschränkt*, wenn sie einen endlichen Durchmesser hat.

**Konvergente Folgen und Grenzwerte.** Eine Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ von Punkten eines metrischen Raums $(X, \rho)$ konvergiert gegen den *Grenzwert* $u \in X$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $\rho(u_k, u) < \varepsilon$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$ gilt, mit anderen Worten, wenn $\lim_{k\to\infty} \rho(u_k, u) = 0$ ist.

**Bemerkung.** 1. Sind $u, v \in X$ Grenzwerte einer konvergenten Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $X$, dann folgt aus der Dreiecksungleichung $\rho(u, v) \le \rho(u_k, u) + \rho(u_k, v)$ stets $u = v$, das heißt, der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

2. Ist $E \subset X$ eine nichtleere Menge, so gilt nach Definition genau dann $u \in \operatorname{cl} E$, wenn eine Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ existiert, die gegen den Grenzwert $u \in X$ konvergiert.

**Konvergente Teilfolgen und Häufungspunkte.** Sei $(X, \rho)$ ein metrischer Raum.

1. Eine Folge $\{u_{k_\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ wird *Teilfolge* von $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ genannt, wenn $\{k_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge natürlicher Zahlen ist.

2. Man nennt $u \in X$ einen *Häufungspunkt* der Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$, wenn eine Teilfolge $\{u_{k_\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft $\lim_{\ell\to\infty} \rho(u_{k_\ell}, u) = 0$ existiert, das heißt, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ und alle $k_0 \in \mathbb{N}$ ein $k \in \mathbb{N}$, $k \ge k_0$ gibt, so daß $\rho(u_k, u) < \varepsilon$ gilt.

**Cauchy-Folgen und Vollständigkeit.** Sei $(X, \rho)$ ein metrischer Raum.

1. Eine Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $\rho(u_k, u_\ell) < \varepsilon$ für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$ mit $k, \ell \ge k_0$ gilt.

2. Der Raum $(X, \rho)$ heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ gegen einen Grenzwert $u \in X$ konvergiert.

**Bemerkung.** Konvergiert eine Teilfolge $\{u_{k_\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ einer Cauchy-Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ in einem metrischen Raum $(X, \rho)$ gegen einen Grenzwert $u \in X$, dann konvergiert wegen der für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$ geltenden Abschätzung $\rho(u_k, u) \le \rho(u_k, u_{k_\ell}) + \rho(u_{k_\ell}, u)$ auch die ganze Folge $\{u_k\}_{k\in X}$ gegen diesen Grenzwert $u \in X$.

**Raum aller Zahlenfolgen.** 1. Auf der *Menge s aller Zahlenfolgen* $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ mit Gliedern aus dem Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ wird folgende Metrik $\rho : s \times s \to \mathbb{R}$ eingeführt:

$$\rho(u, v) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{2^\ell} \frac{|x_\ell - y_\ell|}{1 + |x_\ell - y_\ell|} \qquad \text{für alle } u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}},\ v = \{y_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in s.$$

Tatsächlich gilt für alle $u, v \in s$ stets $\rho(u, v) = \rho(v, u) \ge 0$, und es ist $\rho(u, v) = 0$ nur im Falle $u = v$ erfüllt. Außerdem gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$ die Abschätzung

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \le \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \le \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

Somit ist für alle $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$, $v = \{y_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$, $w = \{z_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in s$ die Beziehung

$$\frac{|x_\ell - y_\ell|}{1 + |x_\ell - y_\ell|} \le \frac{|x_\ell - z_\ell|}{1 + |x_\ell - z_\ell|} + \frac{|z_\ell - y_\ell|}{1 + |z_\ell - y_\ell|} \qquad \text{für jedes } \ell \in \mathbb{N}$$

und damit die Dreiecksungleichung $\rho(u, v) \le \rho(u, w) + \rho(w, v)$ erfüllt.

2. Jede Teilmenge von $s$ ist beschränkt, denn es gilt $\rho(u, v) < 1$ für alle $u, v \in s$.

3. Eine Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset s$ von Elementen $u_k = \{x_{k\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in s$ konvergiert in $(s, \rho)$ genau dann gegen den Grenzwert $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in s$, wenn für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ die Folge $\{u_{k\ell}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ der $\ell$-ten Folgeglieder gegen den Grenzwert $x_\ell$ in $\mathbb{K}$ konvergiert.

*Beweis.* Einerseits folgt aus $\lim_{k\to\infty} \rho(u_k, u) = 0$ und der Abschätzung

$$\frac{1}{2^\ell}\frac{|x_{k\ell}-x_\ell|}{1+|x_{k\ell}-x_\ell|} \le \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1}{2^\ell}\frac{|x_{k\ell}-x_\ell|}{1+|x_{k\ell}-x_\ell|} = \rho(u_k, u)$$

stets $\lim_{k\to\infty} |x_{k\ell}-x_\ell| = 0$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$.

Gilt umgekehrt $\lim_{k\to\infty} |x_{k\ell}-x_\ell| = 0$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$, wird $\varepsilon > 0$ vorgegeben und ein $\ell_0 \in \mathbb{N}$ mit $2^{-\ell_0} < \varepsilon$ ausgewählt, dann ergibt sich für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\rho(u_k, u) \le \sum_{\ell=1}^{\ell_0}\frac{1}{2^\ell}\frac{|x_{k\ell}-x_\ell|}{1+|x_{k\ell}-x_\ell|} + \sum_{\ell=\ell_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^\ell} \le \sum_{\ell=1}^{\ell_0}\frac{1}{2^\ell}\frac{|x_{k\ell}-x_\ell|}{1+|x_{k\ell}-x_\ell|} + \varepsilon.$$

Da $\lim_{k\to\infty} |x_{k\ell}-x_\ell| = 0$ für jedes $\ell \in \{1, \ldots, \ell_0\}$ gilt, kann man ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{\ell=1}^{\ell_0}\frac{1}{2^\ell}\frac{|x_{k\ell}-x_\ell|}{1+|x_{k\ell}-x_\ell|} < \varepsilon \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{N},\, k \ge k_0$$

finden, woraus sich schließlich $\rho(u_k, u) < 2\varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \ge k_0$ ergibt. □

4. Sei $F$ eine Teilmenge von $s$ und $F_\ell = \big\{x_\ell \in \mathbb{K} : \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in F\big\} \subset \mathbb{K}$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ die Menge der $\ell$-ten Glieder der Folgen aus $F$. Die Menge $F$ ist genau dann abgeschlossen in $(s, \rho)$, wenn $F_\ell$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ in $\mathbb{K}$ abgeschlossen ist.

5. Der metrische Raum $(s, \rho)$ ist vollständig.

*Beweis.* Sei $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset s$ eine Cauchy-Folge von Elementen $u_k = \{x_{k\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in s$. Da

$$\frac{1}{2^\ell}\frac{|x_{k\ell}-x_{m\ell}|}{1+|x_{k\ell}-x_{m\ell}|} \le \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1}{2^\ell}\frac{|x_{k\ell}-x_{m\ell}|}{1+|x_{k\ell}-x_{m\ell}|} = \rho(u_k, u_m) \quad \text{für alle } k, m \in \mathbb{N}$$

gilt, muß die Folge $\{x_{k\ell}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ der $\ell$-ten Folgeglieder für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$ sein und damit wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{K}$ gegen ein $x_\ell \in \mathbb{K}$ konvergieren. Nach Aussage 3 folgt daraus $\lim_{k\to\infty} \rho(u_k, u) = 0$ für $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in s$. □

**Vollständigkeit abgeschlossener Teilräume.** Sei $(X, \rho)$ ein vollständiger metrischer Raum und $X_0 \subset X$ eine nichtleere Teilmenge. Der metrische Teilraum $(X_0, \rho_0)$ mit $\rho_0 = \rho|X_0 \times X_0$ ist genau dann vollständig, wenn $X_0$ in $X$ abgeschlossen ist.

*Beweis.* 1. Jedes $u \in \operatorname{cl} X_0$ ist Grenzwert einer konvergenten Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X_0$, die offenbar eine Cauchy-Folge in $(X_0, \rho_0)$ ist. Im Falle der Vollständigkeit von $(X_0, \rho_0)$ konvergiert die Folge gegen einen Grenzwert $v \in X_0$. Die eindeutige Bestimmtheit des Grenzwerts konvergenter Folgen liefert $u = v \in X_0$ und somit $\operatorname{cl} X_0 = X_0$.

2. Jede Cauchy-Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X_0$ konvergiert wegen der Vollständigkeit von $(X, \rho)$ gegen einen Grenzwert $u \in X$, woraus $u \in \operatorname{cl} X_0$ folgt. Ist $X_0$ abgeschlossen in $X$, dann ergibt sich $u \in \operatorname{cl} X_0 = X_0$ und somit die Vollständigkeit von $(X_0, \rho_0)$. □