Vorlesung 10

Endlichdimensionale lineare Räume

Koordinatenraum. Das n-fache kartesische Produkt $\mathbb{K}^n$ des Körpers $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ wird als n-dimensionaler linearer *Koordinatenraum* bezeichnet. Addition und skalare Multiplikation werden wie üblich durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \text{ und } \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

sowie

$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \text{ und } \alpha \in \mathbb{K}$$

erklärt. Stattet man $\mathbb{K}^n$ mit der Norm $\|x\|_\infty = \sup_{1 \le k \le n} |x_k|$ für $x \in \mathbb{K}^n$ aus, dann erhält man einen separablen Banach-Raum $(\mathbb{K}^n, \| \ \|_\infty)$.

Homöomorphismus zwischen *n*-dimensionalen Räumen. Sei $(V, \| \ \|)$ ein linearer normierter Raum der Dimension $\dim V = n$ über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Dann ist die bijektive lineare Abbildung $T : \mathbb{K}^n \leftrightarrow V$, die durch

$$Tx = \sum_{k=1}^n x_k v_k \quad \text{für } x \in \mathbb{K}^n$$

definiert wird, ein Homöomorphismus von $(\mathbb{K}^n, \| \ \|_\infty)$ auf $(V, \| \ \|)$.

Beweis. 1. Die Stetigkeit von $T : \mathbb{K}^n \leftrightarrow V$ ergibt sich aus der Abschätzung

$$\|Tx\|_V \le \left\| \sum_{k=1}^n x_k v_k \right\| \le \sum_{k=1}^n |x_k| \|v_k\| \le \|x\|_\infty \sum_{k=1}^n \|v_k\| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{K}^n.$$

2. Die Stetigkeit der Abbildung $T^{-1} : V \to \mathbb{K}^n$ wird induktiv über die Dimension $\dim V = n \in \mathbb{N}$ bewiesen: Durch die Vorschrift

$$A_n x_n = x_n v_n \quad \text{für } x_n \in \mathbb{K}$$

wird eine stetige Abbildung $A_n : \mathbb{K} \leftrightarrow E_n$ von $\mathbb{K}$ auf $E_n = \operatorname{lin}\{v_n\}$ definiert. Wegen $v_n \neq 0$ und $\|x_n v_n\| = |x_n| \|v_n\|$ gilt $|x_n| = \frac{1}{\|v_n\|} \|x_n v_n\|$ für alle $x_n \in \mathbb{K}$, woraus im eindimensionalen Fall folgt, daß $A_n : \mathbb{K} \leftrightarrow E_n$ ein Homöomorphismus ist.

Unter der induktiven Voraussetzung, daß die durch

$$Az = \sum_{k=1}^{n-1} z_k v_k \quad \text{für } z \in \mathbb{K}^{n-1}$$

definierte Abbildung $A : \mathbb{K}^{n-1} \leftrightarrow E$ ein Homöomorphismus von $\mathbb{K}^{n-1}$ auf die Hyperebene $E = \operatorname{lin}\{v_1, \ldots, v_{n-1}\} \subset V$ ist, überträgt sich die Vollständigkeit des linearen normierten Raums $(\mathbb{K}^{n-1}, \| \ \|_\infty)$ auf den linearen normierten Raum $(E, \| \ \|)$, der somit eine abgeschlossene Hyperebene in $(V, \| \ \|)$ ist.

Für $E = \operatorname{lin}\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ und $E_n = \operatorname{lin}\{v_n\}$ ist somit die Summe $V = E + E_n$ topologisch direkt, das heißt, die durch die Zuordnungen

$$u = \textstyle\sum_{k=1}^{n} x_k v_k \mapsto P_n u = x_n v_n,$$
$$u = \textstyle\sum_{k=1}^{n} x_k v_k \mapsto P_E u = \sum_{k=1}^{n-1} x_k v_k,$$

definierten Projektoren $P_n : V \to V$ von V auf E_n bzw. $P_E : V \to V$ von V auf E sind stetige Abbildungen. Die Stetigkeit der inversen Abbildungen $A_n^{-1} : E_n \leftrightarrow \mathbb{K}$ und $A^{-1} : E \leftrightarrow \mathbb{K}^{n-1}$ liefert somit wegen

$$T^{-1}u = x = \begin{pmatrix} A^{-1} P_E u \\ A_n^{-1} P_n u \end{pmatrix} \quad \text{für alle } u = \textstyle\sum_{k=1}^{n} x_k v_k \in V$$

die Stetigkeit der inversen Abbildung $T^{-1} : V \to \mathbb{K}^n$. □

Endlichdimensionale Erweiterung abgeschlossener Teilräume. In einem linearen normierten Raum $(V, \|\ \|)$ sei V_1 ein abgeschlossener linearer Teilraum und V_2 ein endlichdimensionaler linearer Teilraum. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. Die Summe $V_1 + V_2$ ist ein abgeschlossener linearer Teilraum von V.
2. Ist $V = V_1 + V_2$ eine algebraisch direkte Summe, dann ist diese Summe auch topologisch direkt.

Beweis. 1. Durch vollständige Induktion nach der Dimension $\dim V_2 = n \in \mathbb{N}$ läßt sich der Beweis auf den Fall $\dim V_2 = 1$ zurückführen:

Sei $V_2 = \operatorname{lin}\{v\}$ für ein $v \in V_2$ gegeben. Im Falle $v \in V_1$ gilt $V_1 + V_2 = V_1$, und es ist nichts zu beweisen. Anderenfalls gilt $v \notin V_1$, und man kann jedes $u \in V_1 + V_2$ in der Form $u = w + \langle f, u\rangle v$ mit $w \in V_1$ und einer linearen Abbildung $f : V_1 + V_2 \to \mathbb{K}$ darstellen. Da V_1 eine abgeschlossene Hyperebene in $V_1 + V_2$ ist, muß $f : V_1 + V_2 \to \mathbb{K}$ eine lineare stetige Abbildung sein.

Ist $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V_1 + V_2$ eine Folge, die in V gegen einen Grenzwert $u \in \operatorname{cl}(V_1 + V_2)$ konvergiert, so wird durch $u_k = w_k + \langle f, u_k\rangle v$ auf eindeutige Art und Weise eine Folge $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V_1$ definiert. Da es eine Konstante $c > 0$ gibt, so daß

$$|\langle f, u_k - u_m\rangle| \le c\|u_k - u_m\| \quad \text{für alle } k, m \in \mathbb{N}$$

gilt, ist $\{\langle f, u_k\rangle\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$, die demzufolge gegen einen Grenzwert $\lambda \in \mathbb{K}$ konvergiert. Damit konvergiert $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V_1$ wegen $w_k = u_k - \langle f, u_k\rangle v$ gegen den Grenzwert $u - \lambda v \in V_1$, da V_1 in V abgeschlossen ist. Wegen $v \in V_2$ folgt daraus $u \in V_1 + V_2$, das heißt, die Abgeschlossenheit von $V_1 + V_2$ in V.

2. Sei $V = V_1 + V_2$ eine algebraisch direkte Summe. Die topologische Direktheit dieser Summe wird induktiv über die Dimension $\dim V_2 = n \in \mathbb{N}$ bewiesen:

Dabei folgt der Induktionsanfang für $\dim V_2 = 1$ bereits aus den Betrachtungen über abgeschlossene Hyperebenen in V. Sei also $V_2 = L + E$ als topologisch direkte

Summe linearer Teilräume L und E von V_2 mit $\dim L = 1$ und $\dim E = n-1$ dargestellt. Dann ist $V_0 = V_1 + L$ wegen Schritt 1 in V abgeschlossen und die Summe $V = V_0 + E$ nach Induktionsvoraussetzung topologisch direkt. Somit ist V homöomorph zu $V_0 \times E$ und $V_0 = V_1 + L$ homöomorph zu $V_1 \times L$, also ist V homöomorph zu $V_1 \times L \times E$. Da $L \times E$ homöomorph zu $V_2 = L + E$ ist, muß V schließlich homöomorph zu $V_1 \times V_2$ sein. □

Kompaktheitskriterium von Riesz. Sei $(V, \|\ \|)$ ein linearer normierter Raum. Die abgeschlossene Einheitskugel $K = \{u \in V : \|u\| \leq 1\}$ ist genau dann kompakt in V, wenn V endlichdimensional ist.

Beweis. 1. Sei $K = \{u \in V : \|u\| \leq 1\}$ kompakt in V und $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Dann ist die Familie $\{B(u,\varepsilon)\}_{u\in K} \subset V$ offener Kugeln eine Überdeckung von K, und man kann eine endliche Menge $\{u_1, \dots, u_m\} \subset K$ von Punkten herausgreifen, so daß noch immer $K \subset \cup_{k=1}^m B(u_k, \varepsilon)$ gilt.

Angenommen, $V_0 = \operatorname{lin}\{u_1, \dots, u_m\}$ wäre ein *echter* linearer Teilraum von V, das heißt, es gäbe ein $u \in V$ mit $u \notin V_0$. Da V_0 als endlichdimensionaler Teilraum in V abgeschlossen ist, bekäme man $\delta = \inf\left\{\|u-v\| : v \in V_0\right\} > 0$. Daher könnte man ein $v \in V_0$ finden, so daß $\delta \leq \|u-v\| \leq \frac{3}{2}\delta$ gelten wurde. Betrachtet man $w = \frac{u-v}{\|u-v\|} \in V$, dann gäbe es wegen $\|w\| = 1$ ein $k \in \{1, \dots, m\}$ mit $\|w - u_k\| \leq \frac{1}{2}$. Da auch

$$u = v + \|u-v\|w = (v + \|u-v\|u_k) + \|u-v\|(w - u_k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

gelten würde, ergäbe sich wegen $v + \|u-v\|u_k \in V_0$ und der Definition des Abstands $\delta > 0$ die Abschätzung $\|u-v\|\|w-u_k\| \geq \delta$ und demnach $\|u-v\| \geq 2\delta$ im Widerspruch zur Wahl von $v \in V_0$ und $\delta > 0$. Somit gilt $V = V_0 = \operatorname{lin}\{u_1, \dots, u_m\}$.

2. Sei $(V, \|\ \|)$ ein linearer normierter Raum der Dimension $\dim V = n$ mit der Basis $\{v_1, \dots, v_m\}$. Betrachtet man den durch

$$Tx = \textstyle\sum_{k=1}^n x_k v_k \quad \text{für } x \in \mathbb{K}^n$$

definierten linearen Homöomorphismus $T : \mathbb{K}^n \leftrightarrow V$, dann gibt es eine abgeschlossene Kugel $F = \{x \in \mathbb{K}^n : \|x\|_\infty \leq d\}$ mit $d > 0$, so daß $K \subset T[F]$ gilt. Wegen der Kompaktheit von F in $\mathbb{K}^n$ und der Stetigkeit von $T : \mathbb{K}^n \to V$ muß auch $T[F]$ in V kompakt sein, also auch die abgeschlossene Teilmenge K von $T[F]$ in V. □

Separable lineare normierte Räume. Sei $(V, \|\ \|)$ ein linearer normierter Raum.

1. Man nennt eine Teilmenge E von V *total*, wenn $V = \operatorname{cl}\operatorname{lin} E$ gilt, das heißt, wenn $\operatorname{lin} E$ ein dichter linearer Teilraum von V ist.

2. Es gibt genau dann eine Indexmenge $N \subset \mathbb{N}$ und eine totale Folge $\{u_k\}_{k\in N} \subset V$ von linear unabhängigen Vektoren, wenn der Raum $(V, \|\ \|)$ separabel ist.

Beweis. 1. Sei $\{u_k\}_{k\in N} \subset V$ eine totale Folge in V, $Q = \mathbb{Q}$ im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sowie $Q = \{\beta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\beta \in \mathbb{Q}, \operatorname{Im}\beta \in \mathbb{Q}\}$ im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Betrachtet man die Menge

$$D = \left\{\sum_{k\in M} \beta_k u_k \in V : \beta_k \in Q \text{ für alle } k \in M,\ M \subset N \text{ endlich}\right\}$$

aller (endlichen) Linearkombination mit rationalen Koeffizienten, so ist D eine abzählbare Teilmenge von V. Da nach Definition der lineare Teilraum $E = \operatorname{lin}\{u_k\}_{k\in N}$ in V dicht liegt, genügt es zu zeigen, daß D in E dicht ist:

Sei $\sum_{k\in M} \alpha_k u_k \in E$ vorgegeben, wobei $\alpha_k \in \mathbb{K}$ für alle $k \in M$ gilt und $M \subset N$ eine endliche Indexmenge ist. Wird $\varepsilon > 0$ beliebig fixiert, dann findet man wegen der Dichtheit von Q in $\mathbb{K}$ für jedes $k \in M$ ein $\beta_k \in Q$, so daß $\sum_{k\in M} |\alpha_k - \beta_k| \|u_k\| \le \varepsilon$ gilt. Damit gilt für $\sum_{k\in M} \beta_k u_k \in D$ und $\sum_{k\in M} \alpha_k u_k \in E$ die Abschätzung

$$\left\|\sum_{k\in M} \alpha_k u_k - \sum_{k\in M} \beta_k u_k\right\| \le \sum_{k\in M} |\alpha_k - \beta_k| \|u_k\| \le \varepsilon.$$

2. Sei umgekehrt $(V, \|\ \ \|)$ separabel. Ist V endlichdimensional, dann ist jede Basis von V eine endliche totale Teilmenge von V.

Sei V unendlichdimensional und $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ eine (unendliche) Folge, die dicht in V liegt. Es soll induktiv bewiesen werden, daß eine Teilfolge $\{u_{\ell_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ linear unabhängiger Vektoren aus der Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ herausgegriffen werden kann, so daß die Bedingung $u_m \in \operatorname{lin}\{u_{\ell_1}, \dots, u_{\ell_k}\}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ mit $m \le \ell_k$ erfüllt wird:

Dazu wählt man zuerst den Index $\ell_1 = \min\{k \in \mathbb{N} : u_k \ne 0\}$. Unter der Induktionsvoraussetzung, daß man schon linear unabhängige Vektoren $u_{\ell_1}, \dots, u_{\ell_k}$ aus der Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ausgewählt hat, so daß $u_m \in \operatorname{lin}\{u_{\ell_1}, \dots, u_{\ell_k}\}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ mit $m \le \ell_k$ gilt, bestimmt man den nächsten Index

$$\ell_{k+1} = \min\left\{m \in \mathbb{N} : m > \ell_k,\ u_m \notin \operatorname{lin}\{u_{\ell_1}, \dots, u_{\ell_k}\}\right\}.$$

Würde ein solcher Index nicht existieren, dann müßte der endlichdimensionale, also abgeschlossene lineare Teilraum $\operatorname{lin}\{u_{\ell_1}, \dots, u_{\ell_k}\}$ die Abschließung $\operatorname{cl}\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} = V$ enthalten, was im Widerspruch zur unendlichen Dimension von V stünde. Somit sind $u_{\ell_1}, \dots, u_{\ell_{k+1}}$ linear unabhängige Vektoren, und es gilt $u_m \in \operatorname{lin}\{u_{\ell_1}, \dots, u_{\ell_{k+1}}\}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ mit $m \le \ell_{k+1}$. Die Teilfolge $\{u_{\ell_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ hat somit die geforderten Eigenschaften und ist total, da die obige Konstruktion für jedes $k \in \mathbb{N}$ unbeschränkt fortgesetzt werden kann. $\square$