Vorlesung 11

Räume linearer stetiger Abbildungen

Raum linearer stetiger Abbildungen. Seien $(V, \| \ \|_V)$ und $(W, \| \ \|_W)$ zwei lineare normierte Räume über demselben Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

1. Die Menge $\mathcal{L}(V; W)$ aller linearen stetigen Abbildungen $T : V \to W$ ist ein linearer Teilraum des linearen Raumes $L(V; W)$ aller linearen Abbildungen.

2. Durch die Zuordung $T \mapsto \|T\| = \sup\big\{\|Tu\|_W : u \in V, \|u\|_V \leq 1\big\}$ wird eine Norm auf $\mathcal{L}(V; W)$ definiert.

3. Ist der lineare normierte Raum $(W, \| \ \|_W)$ vollständig, so ist auch der lineare normierte Raum $(\mathcal{L}(V; W), \| \ \|)$ vollständig.

Beweis. 1. Offenbar gilt für jedes $T \in \mathcal{L}(V; W)$ nach Definition stets $\|T\| \geq 0$ sowie genau dann $\|T\| = 0$, wenn $\|Tu\|_W = 0$ für alle $u \in V$, $\|u\|_V \leq 1$, also $T = 0$ gilt.

Für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und $T \in \mathcal{L}(V; W)$ ergibt sich aus $\|\alpha Tu\|_W = |\alpha|\|Tu\|_W$ durch die Bildung des Supremums über $u \in V$, $\|u\|_V \leq 1$ auf der rechten und der linken Seite sowohl $\alpha T \in \mathcal{L}(V; W)$ als auch die Identität $\|\alpha T\| = |\alpha|\|T\|$.

Für alle $A, T \in \mathcal{L}(V; W)$ folgt aus $\|Au + Tu\|_W \leq \|Au\|_W + \|Tu\|_W$ durch die Bildung des Supremums über $u \in V$, $\|u\|_V \leq 1$ auf der rechten und der linken Seite sowohl $A + T \in \mathcal{L}(V; W)$ als auch $\|A + T\| \leq \|A\| + \|T\|$.

2. Ist $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(V; W)$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}(V; W)$, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\|T_k - T_\ell\| \leq \varepsilon$ für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$ mit $k, \ell \geq k_0$ gilt, das heißt,

$$\|T_k u - T_\ell u\|_W \leq \|T_k - T_\ell\|\|u\|_V \leq \varepsilon\|u\|_V \quad \text{für alle } u \in V.$$

Damit ist $\{T_k u\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W$ für jedes fixierte $u \in V$ eine Cauchy-Folge im Banach-Raum $(W, \| \ \|_W)$, konvergiert also in W gegen einen Grenzwert $Tu \in W$. Durch die Zuordnung $u \mapsto Tu$ wird eine Abbildung $T : V \to W$ definiert.

Wegen der Stetigkeit der Addition $(w_1, w_2) \mapsto w_1 + w_2$ von $W \times W$ nach W und der skalaren Multiplikation $(\alpha, w) \mapsto \alpha w$ von $\mathbb{K} \times W$ nach W folgt jeweils durch Grenzübergang $k \to \infty$ aus $T_k(u + v) = T_k u + T_k v$ stets $T(u + v) = Tu + Tv$ für $u, v \in V$ sowie aus $T_k(\alpha u) = \alpha T_k u$ stets $T(\alpha u) = \alpha Tu$ für $\alpha \in \mathbb{K}$ und $u \in V$. Damit ist $T : V \to W$ eine lineare Abbildung.

Geht man für beliebig fixiertes $u \in V$ mit $\|u\|_V \leq 1$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$ in $\|T_k u - T_\ell u\|_W \leq \varepsilon$ zur Grenze $\ell \to \infty$ über, dann ergibt sich

$$\|T_k u - Tu\|_W \leq \varepsilon \quad \text{für alle } u \in V,\ \|u\|_V \leq 1 \text{ und } k \in \mathbb{N},\ k \geq k_0,$$

also insbesondere $\|Tu\|_W \leq \|T_{k_0} u\|_W + \|T_{k_0} u - Tu\|_W \leq \|T_{k_0}\| + \varepsilon$ für alle $u \in V$, $\|u\|_V \leq 1$, das heißt, $T \in \mathcal{L}(V; W)$ ist eine lineare stetige Abbildung. Außerdem folgt aus der vorletzten Abschätzung $\|T_k - T\| \leq \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$ und somit die Konvergenz der Folge $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}(V; W)$ gegen $T \in \mathcal{L}(V; W)$. $\square$

Verkettung linearer stetiger Abbildungen. Sind $(V, \|\ \|_V)$, $(W, \|\ \|_W)$, $(X, \|\ \|_X)$ lineare normierte Räume über demselben Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, dann folgt aus $T \in \mathcal{L}(V; W)$ und $A \in \mathcal{L}(W; X)$ stets $AT \in \mathcal{L}(V; X)$ sowie $\|AT\| \leq \|A\|\|T\|$.

Beweis. Da $\|Tu\|_W \leq \|T\|\|u\|_V$ für alle $u \in V$ sowie $\|Aw\|_X \leq \|A\|\|w\|_W$ für alle $w \in W$ gilt, ergibt sich $\|ATu\|_X \leq \|A\|\|Tu\|_W \leq \|A\|\|T\|\|u\|_V$ für alle $u \in V$ und somit $AT \in \mathcal{L}(V; X)$ sowie $\|AT\| \leq \|A\|\|T\|$. □

Konvergente Reihen stetiger Bilder. Seien $(V, \|\ \|_V)$ und $(W, \|\ \|_W)$ zwei Banach-Räume und $T \in \mathcal{L}(V; W)$ eine lineare stetige Abbildung. Ist $\{\sum_{\ell=1}^k u_\ell\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ eine in V (absolut) konvergente Reihe, so ist $\{\sum_{\ell=1}^k Tu_\ell\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W$ eine in W (absolut) konvergente Reihe, und für ihre Summen gilt

$$\textstyle\sum_{\ell=1}^\infty Tu_\ell = T\big(\sum_{\ell=1}^\infty u_\ell\big) \in W.$$

Beweis. 1. Sei $\{\sum_{\ell=1}^k u_\ell\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ eine in V konvergente Reihe. Wegen $T \in \mathcal{L}(V; W)$ kann man den Grenzübergang $k \to \infty$ in

$$\textstyle\sum_{\ell=1}^k Tu_\ell = T\big(\sum_{\ell=1}^k u_\ell\big) \in W \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

ausführen und erhält die Konvergenz der Reihe $\{\sum_{\ell=1}^k Tu_\ell\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W$ in W gegen den Grenzwert $\sum_{\ell=1}^\infty Tu_\ell = T\big(\sum_{\ell=1}^\infty u_\ell\big) \in W$.

2. Wegen $T \in \mathcal{L}(V; W)$ erhält man zunächst die Abschätzung

$$\textstyle\sum_{\ell=1}^k \|Tu_\ell\|_W \leq \|T\| \sum_{\ell=1}^k \|u_\ell\|_V \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Konvergiert die Reihe $\{\sum_{\ell=1}^k u_\ell\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ absolut in V, dann muß somit auch die Reihe $\{\sum_{\ell=1}^k Tu_\ell\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W$ absolut in W konvergieren. Außerdem folgt

$$\textstyle\sum_{\ell=1}^\infty \|Tu_\ell\|_W \leq \|T\| \sum_{\ell=1}^\infty \|u_\ell\|_V$$

nach Ausführung des Grenzübergangs $k \to \infty$. □

Lineare stetige Abbildungen auf Banach-Räumen summierbarer Zahlenfolgen. Sei $(\ell^p, \|\ \|_p)$ für $p \in (1, \infty)$ der separable Banach-Raum aller zur p-ten Potenz summierbaren Zahlenfolgen $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$, der mit der durch $\|u\|_p^p = \sum_{\ell=1}^\infty |x_\ell|^p$ definierten Norm ausgestattet ist.

Sei ferner $q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gegeben sowie $\{a_{k\ell}\}_{k,\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ eine Doppelfolge mit der Eigenschaft, daß die Doppelreihe $\{\sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^n |a_{k\ell}|^q\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ gegen die endliche Summe $\sum_{k=1}^\infty \sum_{\ell=1}^\infty |a_{k\ell}|^q$ konvergiert.

Wird jeder Folge $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ die Folge $Au = \{z_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ mit den Gliedern

$$z_k = \textstyle\sum_{\ell=1}^\infty a_{k\ell} x_\ell \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

zugeordnet, dann erhält man eine Abbildung $A \in \mathcal{L}(\ell^p; \ell^q)$, die jede *beschränkte* Teilmenge E von ℓ^p auf eine *relativ kompakte* Teilmenge $A[E]$ von ℓ^q abbildet.

Beweis. 1. Wegen der Hölder-Ungleichung gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$|z_k|^q = \left|\sum_{\ell=1}^{\infty} a_{k\ell} x_\ell\right|^q \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} |a_{k\ell}|^q \bigl(\sum_{\ell=1}^{\infty} |x_\ell|^p\bigr)^{q/p},$$

also $|z_k|^q \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} |a_{k\ell}|^q \|u\|_p^q$, das heißt, jedes Folgeglied $z_k = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{k\ell} x_\ell$ ist die endliche Summe einer in $\mathbb{K}$ konvergenten Reihe.

2. Durch Summation über $k \in \{1, \ldots, m\}$ ergibt sich aus der in Schritt 1 gewonnenen Abschätzung

$$\sum_{k=1}^{m} |z_k|^q \leq \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{\infty} |a_{k\ell}|^q \bigl(\sum_{\ell=1}^{\infty} |x_\ell|^p\bigr)^{q/p}$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$. Der Grenzübergang $m \to \infty$ liefert somit

$$\|Au\|_q \leq \bigl(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} |a_{k\ell}|^q\bigr)^{1/q} \|u\|_p \quad \text{für jedes } u \in \ell^p$$

und damit den Nachweis, daß A den Raum ℓ^p in den Raum ℓ^q abbildet.

3. Da für alle $u = \{x_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \in \ell^p$, $v = \{y_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \in \ell^p$ sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ stets

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} a_{k\ell}\bigl(\alpha x_\ell + \beta y_\ell\bigr) = \alpha \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{k\ell} x_\ell + \beta \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{k\ell} y_\ell$$

gilt, ist $A : \ell^p \to \ell^q$ eine lineare Abbildung. Aus Schritt 2 ergibt sich $A \in \mathcal{L}(\ell^p; \ell^q)$ zusammen mit der Normabschätzung $\|A\|^q \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} |a_{k\ell}|^q$.

4. Wegen der Konvergenz der Reihe $\bigl\{\sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{\infty} |a_{k\ell}|^q\bigr\}_{m \in \mathbb{N}}$ gegen die endliche Summe $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} |a_{k\ell}|^q$ gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} |a_{k\ell}|^q \leq \varepsilon^q \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \text{ gilt.}$$

Durch Summation über $k \in \{n+1, \ldots, m\}$ folgt aus der in Schritt 1 hergeleiteten Abschätzung

$$\sum_{k=n+1}^{m} |z_k|^q \leq \sum_{k=n+1}^{m} \sum_{\ell=1}^{\infty} |a_{k\ell}|^q \bigl(\sum_{\ell=1}^{\infty} |x_\ell|^p\bigr)^{q/p}$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n+1$. Im Grenzprozeß $m \to \infty$ erhält man für die Folge $Au = \{z_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^q$ die folgende Abschätzung für den Reihenrest

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |z_k|^q \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} |a_{k\ell}|^q \|u\|_p^q \leq \varepsilon^q \|u\|_p^q \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

Nach dem Kompaktheitskriterium für Teilmengen von ℓ^q bildet somit $A \in \mathcal{L}(\ell^p; \ell^q)$ jede Kugel $E = \{u \in V : \|u\|_p < \delta\} \subset \ell^p$ um den Nullpunkt mit beliebigem Radius $\delta > 0$ auf eine relativ kompakte Teilmenge $A[E]$ von ℓ^q ab. $\square$