Vorlesung 12

Erweiterung linearer stetiger Abbildungen

Erweiterung durch Abschließung. Seien $(V, \| \ \|_V)$ ein linearer normierter Raum und $(W, \| \ \|_W)$ ein Banach-Raum über demselben Körper $\mathbb{K}$. Ist V_0 ein linearer Teilraum von V, dann besitzt jede Abbildung $T_0 \in \mathcal{L}(V_0; W)$ eine eindeutig bestimmte, auf der Abschließung $\mathrm{cl}\, V_0$ definierte Erweiterung $T \in \mathcal{L}(\mathrm{cl}\, V_0; W)$, und es gilt $\|T\| = \|T_0\|$. Diese Erweiterung wird als *Abschließung* von T_0 bezeichnet.

Beweis. 1. Sei $u \in \mathrm{cl}\, V_0$ vorgegeben. Dann gibt es eine Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V_0$ mit $\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_V = 0$. Die Folge $\{T_0 u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W$ ist eine Cauchy-Folge in W, denn es gilt $\|T_0 u_k - T_0 u_\ell\|_W \le \|T_0\| \|u_k - u_\ell\|_V$ für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$. Wegen der Vollständigkeit von W existiert der Grenzwert $w \in W$, es gilt also $\lim_{k\to\infty} \|T_0 u_k - w\|_W = 0$. Dieser Grenzwert hängt *nicht* von der Wahl der Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ab, denn ist $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V_0$ eine weitere Folge mit $\lim_{k\to\infty} \|v_k - u\|_V = 0$, dann folgt

$$\limsup_{k\to\infty} \|T_0 v_k - T_0 u_k\|_W \le \limsup_{k\to\infty} \|T_0\| \|v_k - u_k\|_V = 0.$$

Somit wird jedem $u \in \mathrm{cl}\, V_0$ mit Hilfe einer konvergenten Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V_0$, für die $\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_V = 0$ gilt, in eindeutiger Weise ein Bild $Tu \in W$ zugeordnet und damit eine Abbildung $T : \mathrm{cl}\, V_0 \to W$ definiert. Ist $v \in \mathrm{cl}\, V_0$ und $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V_0$ eine Folge mit $\lim_{k\to\infty} \|v_k - v\|_V = 0$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann folgen $T(u + v) = Tu + Tv$ und $T(\lambda u) = \lambda T u$ jeweils durch Grenzübergang $k \to \infty$ in den Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|T(u+v) - (Tu + Tv)\|_W &\le \|T(u+v) - T_0(u_k + v_k)\|_W \\ &\quad + \|T_0 u_k - Tu\|_W + \|T_0 v_k - Tv\|_W \end{aligned}$$

bzw. $\|T(\lambda u) - \lambda T u\|_W \le \|T(\lambda u) - T_0(\lambda u_k)\|_W + |\lambda| \|T_0 u_k - Tu\|_W$. Da sich durch den Grenzübergang $k \to \infty$ in $\|T_0 u_k\|_W \le \|T_0\| \|u_k\|_V$ auch $\|Tu\|_W \le \|T_0\| \|u\|_V$ ergibt, ist $T \in \mathcal{L}(\mathrm{cl}\, V_0; W)$ eine Erweiterung von T_0 auf $\mathrm{cl}\, V_0$ mit der Eigenschaft $\|T\| \le \|T_0\|$. Da andererseits auch

$$\begin{aligned} \|T_0\| &= \sup\left\{\|T_0 u\| : u \in V_0,\ \|u\| \le 1\right\} \\ &= \sup\left\{\|Tu\| : u \in V_0,\ \|u\| \le 1\right\} \le \sup\left\{\|Tu\| : u \in \mathrm{cl}\, V_0,\ \|u\| \le 1\right\} = \|T\| \end{aligned}$$

gilt, folgt $\|T\| = \|T_0\|$.

2. Ist $T_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{cl}\, V_0; W)$ eine Abbildung mit $T_1 | V_0 = T_0$, dann erhält man für jedes $u \in \mathrm{cl}\, V_0$ und jede konvergente Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V_0$ mit $\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_V = 0$ durch Grenzübergang $k \to \infty$ in der Beziehung $T_1 u_k = T_0 u_k$ die Gleichung $T_1 u = Tu$, das heißt, die beiden Abbildungen T_1 und T sind identisch. □

Satz von Hahn-Banach über die Erweiterung reell-linearer Funktionale. Sei $(V, \|\ \ \|)$ ein separabler linearer normierter Raum über $\mathbb{R}$ und V_0 ein linearer Teilraum von V. Dann existiert für jedes reell-lineare Funktional $f_0 \in \mathcal{L}(V_0;\mathbb{R})$ eine reell-lineare Erweiterung $f \in \mathcal{L}(V;\mathbb{R})$ mit $f|V_0 = f_0$ und $\|f\| = \|f_0\|$.

Beweis. 1. Sei $u_1 \in V$, $u_1 \notin V_0$ beliebig vorgegeben. Es soll gezeigt werden, daß sich unter den obigen Voraussetzungen jedes Funktional $f_0 \in \mathcal{L}(V_0;\mathbb{R})$ auf die *elementare Erweiterung* $V_1 = V_0 + \operatorname{lin}\{u_1\}$ des Raumes V_0 zu einem Funktional $f_1 \in \mathcal{L}(V_1;\mathbb{R})$ derart fortsetzen läßt, daß $f_1|V_0 = f_0$ sowie $\|f_1\| = \|f_0\|$ gelten:

Falls ein solches Funktional f_1 existiert, dann ist es offenbar durch die Angabe des Wertes $y_0 = \langle f_1, u_1\rangle \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt. Da $f_1|V_0 = f_0$ und $\|f_1\| = \|f_0\|$ gelten sollen, erfüllt dieser Wert $y_0 \in \mathbb{R}$ für jedes $u \in V_0$ die Beziehung

$$|y_0 - \langle f_0, u\rangle| = |\langle f_1, u_1\rangle - \langle f_1, u\rangle| \le \|f_1\|\|u_1 - u\| = \|f_0\|\|u_1 - u\|.$$

Eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Funktionals $f_1 \in \mathcal{L}(V_1;\mathbb{R})$ mit den angegebenen Eigenschaften ist, daß der Durchschnitt $\cap_{u\in V_0} I(u)$ der abgeschlossenen Intervalle $I(u) = [y(u)-r(u), y(u)+r(u)]$ mit dem Mittelpunkt $y(u) = \langle f_0, u\rangle$ und dem Radius $r(u) = \|f_0\|\|u_1 - u\|$ den Wert $y_0 = \langle f_1, u_1\rangle$ enthält.

2. Um zu zeigen, daß diese Bedingung auch hinreichend ist, wird die Gesamtheit $\{I(u) : u \in V_0\}$ aller Intervalle der obigen Form betrachtet. Sind $I(v_0)$ und $I(v)$ zwei Intervalle aus $\{I(u) : u \in V_0\}$ mit $v_0, v \in V_0$, dann gilt

$$\begin{aligned} r(v_0) + r(v) &= \|f_0\|\big(\|u_1 - v_0\| + \|u_1 - v\|\big) \\ &\ge \|f_0\|\|(u_1 - v_0) - (u_1 - v)\| \ge |\langle f_0, v_0 - v\rangle| = |y(v_0) - y(v)|, \end{aligned}$$

das heißt, die Summe der Radien der Intervalle ist nicht kleiner als der Abstand ihrer Mittelpunkte. Daraus folgt $I(v_0) \cap I(v) \ne \varnothing$ und somit

$$y(v_0) - r(v_0) \le y(v) + r(v) \quad \text{für alle } v \in V_0,$$

also auch $y(v_0) - r(v_0) \le \inf_{v\in V_0}\big(y(v) + r(v)\big)$. Da $v_0 \in V_0$ beliebig gewählt war, ergibt sich schließlich $\sup_{v_0\in V_0}\big(y(v_0) - r(v_0)\big) \le \inf_{v\in V_0}\big(y(v) + r(v)\big)$. Damit ist der Durchschnitt $\cap_{v\in V_0} I(v)$ der Intervalle $I(v) = [y(v) - r(v), y(v) + r(v)]$ nicht leer.

Definiert man das Funktional $f_1 : V_1 \to \mathbb{R}$ durch die Vorgabe des Wertes $y_0 = \langle f_1, u_1\rangle \in \cap_{v\in V_0} I(v)$ in eindeutiger Weise mittels

$$\langle f_1, \lambda u_1 + u\rangle = \lambda y_0 + \langle f_0, u\rangle \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}, u \in V_0,$$

dann erhält man für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ sowie λ, $\mu \in \mathbb{R}$ und u, $v \in V_0$ sowohl Homogenität

$$\langle f_1, \alpha(\lambda u_1 + u)\rangle = \langle f_1, \alpha\lambda u_1 + \alpha u\rangle = \alpha\big(\lambda y_0 + \langle f_0, u\rangle\big) = \alpha\langle f_1, \lambda u_1 + u\rangle$$

als auch Additivität

$$\begin{aligned}\langle f_1, (\lambda u_1 + u) + (\mu u_1 + v)\rangle &= \langle f_1, (\lambda + \mu)u_1 + (u + v)\rangle \\ &= \big(\lambda y_0 + \langle f_0, u\rangle\big) + \big(\mu y_0 + \langle f_0, v\rangle\big) = \langle f_1, \lambda u_1 + u\rangle + \langle f_1, \mu u_1 + v\rangle\end{aligned}$$

sowie $\langle f_1, u\rangle = \langle f_0, u\rangle$ für $\lambda = 0$ und alle $u \in V_0$. Damit ist f_1 eine lineare Fortsetzung von f_0 auf V_1. Da ferner für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ und $u \in V_0$ für $v = -\frac{1}{\lambda}u \in V_0$ stets $y_0 \in I(v)$ gilt, ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned}|\langle f_1, \lambda u_1 + u\rangle| &= |\lambda||y_0 - \langle f_0, v\rangle| = |\lambda||y_0 - y(v)| \\ &\leq |\lambda| r(v) = |\lambda|\|f_0\|\|u_1 - v\| = \|f_0\|\|\lambda u_1 + u\|,\end{aligned}$$

das heißt, $f_1 \in \mathcal{L}(V_1; \mathbb{R})$ sowie $\|f_1\| \leq \|f_0\|$. Die andere Ungleichung $\|f_0\| \leq \|f_1\|$ folgt aus $f_1|V_0 = f_0$, womit die Gleichheit $\|f_1\| = \|f_0\|$ bewiesen ist.

3. Da V ein separabler normierter Raum über $\mathbb{R}$ ist, kann man eine abzählbare, in V dichte Menge E finden. Sollte der lineare Teilraum V_0 von V dicht in V liegen, dann kann man den Beweis durch Anwendung des Satzes über die Erweiterung durch Abschließung vollenden. Anderenfalls ordnet man alle Elemente aus E, die nicht zu V_0 gehören, in einer Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ an.

Bildet man die elementare Erweiterung $V_1 = V_0 + \operatorname{lin}\{u_1\}$ von V_0, dann gibt es nach obiger Konstruktion eine Fortsetzung $f_1 \in \mathcal{L}(V_1; \mathbb{R})$ des Funktionals $f_0 \in \mathcal{L}(V_0; \mathbb{R})$ auf V_1 mit $\|f_1\| = \|f_0\|$. Unter der induktiven Voraussetzung, daß für jedes $\ell \in \{1, \dots, m\}$ schon ein Index $k_\ell \in \mathbb{N}$, ein linearer Teilraum V_ℓ von V und ein Funktional $f_\ell \in \mathcal{L}(V_\ell; \mathbb{R})$ gefunden wurden, so daß $V_\ell = V_{\ell-1} + \operatorname{lin}\{u_{k_\ell}\}$ eine elementare Erweiterung von $V_{\ell-1}$ ist sowie $f_\ell|V_{\ell-1} = f_{\ell-1}$ und $\|f_\ell\| = \|f_{\ell-1}\|$ für jedes $\ell \in \{1, \dots, m\}$ gilt, sind zwei Fälle möglich:

Im Falle $V_m = V$ hat das Funktional f_m die gewünschten Eigenschaften, und der Beweis ist erbracht. Anderenfalls gilt $V_m \neq V$. Sollte der lineare Teilraum V_m dicht in V liegen, dann kann man den Beweis durch Anwendung des Satzes über die Erweiterung durch Abschließung beenden. Ansonsten wählt man denjenigen Index $k_{m+1} \in \mathbb{N}$, der dem ersten Element der Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in E$ entspricht, welches nicht zum Teilraum V_m gehört. Bildet man mit Hilfe von $u_{k_{m+1}}$ die elementare Erweiterung $V_{m+1} = V_m + \operatorname{lin}\{u_{k_{m+1}}\}$ von V_m, so existiert nach obiger Konstruktion eine Fortsetzung $f_{m+1} \in \mathcal{L}(V_{m+1}; \mathbb{R})$ des Funktionals $f_m \in \mathcal{L}(V_m; \mathbb{R})$ auf V_{m+1} mit $\|f_{m+1}\| = \|f_m\|$.

Auf diese Weise kommt man entweder nach endlich vielen Schritten zu der gesuchten Erweiterung, oder man erhält unendliche Folgen $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ und $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ linearer Teilräume V_m von V bzw. linearer Funktionale $f_m \in \mathcal{L}(V_m; \mathbb{R})$, so daß $V_{m-1} \subset V_m$, $f_m|V_{m-1} = f_{m-1}$ und $\|f_m\| = \|f_{m-1}\|$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt. Dabei gehört jedes Element von E und jedes Element der linearen Hülle $\operatorname{lin} E$ zu einem Teilraum V_m.

Ist $u \in \operatorname{lin} E$ gegeben, so gibt es nach der vorigen Bemerkung einen Index $m \in \mathbb{N}$, so daß $u \in V_m$ gilt. Setzt man $\langle f_\infty, u\rangle = \langle f_m, u\rangle$, dann hängt die Definition des Wertes $\langle f_\infty, u\rangle$ *nicht* von der Wahl von $m \in \mathbb{N}$ ab, denn aus $u \in V_m$ und $u \in V_\ell$ folgt zum Beispiel für $m \leq \ell$ stets $V_m \subset V_\ell$ und deshalb $\langle f_m, u\rangle = \langle f_\ell, u\rangle$.

Das auf diese Weise korrekt definierte Funktional $f_\infty : \operatorname{lin} E \to \mathbb{R}$ ist additiv und homogen: Sind nämlich $u, v \in \operatorname{lin} E$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$, dann findet man Indizes $m, \ell \in \mathbb{N}$ mit $u \in V_m$, $v \in V_\ell$ sowie $\langle f_\infty, u\rangle = \langle f_m, u\rangle$ und $\langle f_\infty, v\rangle = \langle f_\ell, v\rangle$. Gilt zum Beispiel $m \leq \ell$, dann folgt $u + v \in V_\ell$ und somit

$$\langle f_\infty, u + v\rangle = \langle f_\ell, u + v\rangle = \langle f_\ell, u\rangle + \langle f_\ell, v\rangle = \langle f_\infty, u\rangle + \langle f_\infty, v\rangle.$$

Außerdem gilt $\lambda u \in V_m$ und daher $\langle f_\infty, \lambda u\rangle = \langle f_m, \lambda u\rangle = \lambda\langle f_m, u\rangle = \lambda\langle f_\infty, u\rangle$. Da auch $f_\infty | V_0 = f_0$ gilt, ist f_∞ eine lineare Fortsetzung von f_0 auf $\operatorname{lin} E$. Ferner gilt

$$|\langle f_\infty, u\rangle| = |\langle f_m, u\rangle| \leq \|f_m\|\|u\| = \|f_0\|\|u\|,$$

das heißt, $f_\infty \in \mathcal{L}(\operatorname{lin} E; \mathbb{R})$ sowie $\|f_\infty\| \leq \|f_0\|$. Die Ungleichung $\|f_0\| \leq \|f_\infty\|$ folgt aus $f_\infty | V_0 = f_0$, woraus sich $\|f_\infty\| = \|f_0\|$ ergibt.

Die Anwendung des Satzes über die Erweiterung durch Abschließung liefert die gewünschte Erweiterung f: Der Definitionsbereich von f ist nämlich die Abschließung der linearen Hülle $\operatorname{lin} E$ in V, also der ganze Raum V, da E in V dicht liegt. Außerdem genügt $f \in \mathcal{L}(V; \mathbb{R})$ den Beziehungen $f | \operatorname{lin} E = f_\infty$ sowie $\|f\| = \|f_\infty\|$ und damit $f | V_0 = f_0$ sowie $\|f\| = \|f_0\|$. □

Satz von Hahn-Banach über die Erweiterung komplex-linearer Funktionale. Ist V_0 ein linearer Teilraum eines separablen linearen normierten Raumes V über $\mathbb{C}$, dann gibt es für jedes komplex-lineare Funktional $f_0 \in \mathcal{L}(V_0; \mathbb{C})$ eine komplex-lineare Erweiterung $f \in \mathcal{L}(V; \mathbb{C})$, für die $f | V_0 = f_0$ sowie $\|f\| = \|f_0\|$ gilt.

Beweis. 1. Ist $(V, \mathbb{C})$ ein linearer (normierter) Raum über $\mathbb{C}$, so ist $(V, \mathbb{R})$ ein linearer (normierter) Raum über $\mathbb{R}$, wenn man für die Elemente aus V nur die skalare Multiplikation mit reellen Zahlen zuläßt.

2. Definiert man für das komplex-lineare Funktional $f_0 \in \mathcal{L}(V_0; \mathbb{C})$ den *Realteil* $g_0 : (V_0, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ und den *Imaginärteil* $h_0 : (V_0, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ durch

$$\langle g_0, u\rangle = \operatorname{Re}\langle f_0, u\rangle \quad \text{und} \quad \langle h_0, u\rangle = \operatorname{Im}\langle f_0, u\rangle \quad \text{für } u \in V_0,$$

so erhält man offenbar reell-lineare Funktionale auf $(V_0, \mathbb{R})$. Es gilt auch g_0, $h_0 \in \mathcal{L}(V_0; \mathbb{R})$, denn für alle $u \in V_0$ bekommt man die Abschätzungen $|\langle g_0, u\rangle| \leq \|f_0\|\|u\|$ sowie $|\langle h_0, u\rangle| \leq \|f_0\|\|u\|$ und somit auch $\|g_0\| \leq \|f_0\|$ sowie $\|h_0\| \leq \|f_0\|$.

Ferner ergibt sich aus der Darstellung $\langle f_0, u\rangle = \langle g_0, u\rangle + i\langle h_0, u\rangle$ für $u \in V_0$ sofort

$$\langle g_0, iu\rangle + i\langle h_0, iu\rangle = \langle f_0, iu\rangle = i\langle f_0, u\rangle = i\langle g_0, u\rangle - \langle h_0, u\rangle,$$

das heißt, $\langle h_0, u\rangle = -\langle g_0, iu\rangle$ und somit $\langle f_0, u\rangle = \langle g_0, u\rangle - i\langle g_0, iu\rangle$ für alle $u \in V_0$.

3. Da $(V_0, \mathbb{R})$ ein linearer Teilraum des separablen linearen normierten Raums $(V, \mathbb{R})$ ist, existiert aufgrund des Satzes von Hahn-Banach über die Erweiterung reell-linearer Funktionale für das Funktional $g_0 \in \mathcal{L}(V_0; \mathbb{R})$ eine reell-lineare Fortsetzung $g \in \mathcal{L}(V; \mathbb{R})$ mit $g|V_0 = g_0$ und $\|g\| = \|g_0\|$. Somit wird durch die Vorschrift

$$\langle f, u\rangle = \langle g, u\rangle - i\langle g, iu\rangle \quad \text{für } u \in V,$$

ein komplex-lineares Funktional $f : (V, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ definiert, denn für alle $u,\ v \in V$ sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt sowohl

$$\begin{aligned}\langle f, u+v\rangle &= \langle g, u+v\rangle - i\langle g, i(u+v)\rangle \\ &= \langle g, u\rangle - i\langle g, iu\rangle + \langle g, v\rangle - i\langle g, iv\rangle = \langle f, u\rangle + \langle f, v\rangle\end{aligned}$$

als auch

$$\begin{aligned}\langle f, (\alpha+\beta i)u\rangle &= \langle g, (\alpha+\beta i)u\rangle - i\langle g, (\alpha i - \beta)u\rangle \\ &= \alpha\big(\langle g, u\rangle - i\langle g, iu\rangle\big) + \beta i\big(\langle g, u\rangle - i\langle g, iu\rangle\big) = \alpha\langle f, u\rangle + \beta i\langle f, u\rangle.\end{aligned}$$

Außerdem folgt aus $g|V_0 = g_0$ auch $f|V_0 = f_0$, denn man hat

$$\langle f, u\rangle = \langle g, u\rangle - i\langle g, iu\rangle = \langle g_0, u\rangle - i\langle g_0, iu\rangle = \langle f_0, u\rangle \quad \text{für jedes } u \in V_0.$$

Werden $u \in V$ beliebig vorgegeben und $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$ sowie $\mu \in \mathbb{C}$, $|\mu| = 1$ derart gewählt, daß $\langle f, u\rangle = r\mu$ gilt, so ergibt sich

$$|\langle f, u\rangle| = r = r\mu\overline{\mu} = \overline{\mu}\langle f, u\rangle = \mathrm{Re}\langle f, \overline{\mu}u\rangle = \langle g, \overline{\mu}u\rangle \leq \|g\|\|\overline{\mu}u\| = \|g\|\|u\|$$

und wegen $\|g\| = \|g_0\| \leq \|f_0\|$ auch $|\langle f, u\rangle| \leq \|f_0\|\|u\|$, das heißt, $f \in \mathcal{L}(V; \mathbb{C})$ sowie $\|f\| \leq \|f_0\|$. Die andere Ungleichung $\|f_0\| \leq \|f\|$ folgt aus $f|V_0 = f_0$, womit die Gleichheit $\|f\| = \|f_0\|$ bewiesen ist. □

Trennungssatz. Sei $(V, \|\ \|)$ ein separabler linearer normierter Raum über $\mathbb{K}$, V_0 ein linearer Teilraum von V und $u_1 \in V$ ein Element mit $\delta = \inf\big\{\|u_1 - v\| : v \in V_0\big\} > 0$. Dann existiert ein Funktional $f \in \mathcal{L}(V; \mathbb{K})$, so daß $\|f\| = 1$, $\langle f, u_1\rangle = \delta$ sowie $\langle f, v\rangle = 0$ für alle $v \in V_0$ gilt.

Beweis. 1. Das Element $u_1 \in V$, $u_1 \notin V_0$ wird zunächst zur elementaren Erweiterung $V_1 = V_0 + \mathrm{lin}\{u_1\}$ von V_0 herangezogen. Da die Summe algebraisch direkt ist, läßt sich ein lineares Funktional $f_1 : V_1 \to \mathbb{K}$ durch

$$\langle f_1, v + \lambda u_1\rangle = \lambda\delta \quad \text{für alle } v \in V_0 \text{ und } \lambda \in \mathbb{K}$$

definieren, denn für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $v, u \in V_0$ erhält man Homogenität

$$\langle f_1, \alpha(v + \lambda u_1)\rangle = \langle f_1, \alpha v + \alpha\lambda u_1\rangle = \alpha\lambda\delta = \alpha\langle f_1, v + \lambda u_1\rangle$$

sowie Additivität

$$\begin{aligned}\langle f_1, (v + \lambda u_1) + (u + \mu u_1)\rangle &= \langle f_1, (v + u) + (\lambda + \mu)u_1\rangle \\ &= \lambda\delta + \mu\delta = \langle f_1, v + \lambda u_1\rangle + \langle f_1, u + \mu u_1\rangle.\end{aligned}$$

Nach Konstruktion gilt sowohl $\langle f_1, u_1\rangle = \delta$ als auch $\langle f_1, v\rangle = 0$ für alle $v \in V_0$.

2. Da für alle $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$ und $v \in V_0$ nach Definition des Abstands $\delta > 0$ auch

$$\|\lambda u_1 + v\| = |\lambda| \left\| u_1 + \tfrac{v}{\lambda} \right\| \geq |\lambda|\delta = |\lambda\delta| = |\langle f_1, v + \lambda u_1\rangle|$$

gilt, erhält man $f_1 \in \mathcal{L}(V_1; \mathbb{K})$ sowie $\|f_1\| \leq 1$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig fixiert. Wählt man $v_0 \in V_0$ derart, daß $\delta \leq \|u_1 - v_0\| \leq \delta + \varepsilon$ gilt, dann folgt

$$\delta = \langle f_1, u_1\rangle = \langle f_1, u_1 - v_0\rangle \leq \|f_1\|\|u_1 - v_0\| \leq \|f_1\|(\delta + \varepsilon).$$

Es ergibt sich $\|f_1\| \geq \frac{\delta}{\delta+\varepsilon}$ und somit $\|f_1\| \geq 1$ wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$, also insgesamt $\|f_1\| = 1$. Schließlich liefert der Satz von Hahn-Banach die gewünschte Erweiterung $f \in \mathcal{L}(V; \mathbb{K})$ von f_1 mit $f|V_1 = f_1$ sowie $\|f\| = \|f_1\|$, und man erhält $\|f\| = 1$, $\langle f, u_1\rangle = \delta$ sowie $\langle f, v\rangle = 0$ für alle $v \in V_0$. $\square$