Vorlesung 13

Folgen linearer stetiger Abbildungen

Prinzip der gleichgradigen Beschränktheit. Sei $(V, \| \ \|_V)$ ein Banach-Raum, ferner $(W, \| \ \|_W)$ ein linearer normierter Raum über demselben Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ sowie M eine Teilmenge von $\mathcal{L}(V; W)$. Ist die Menge $M(u) = \{Tu \in W : T \in M\}$ für jedes $u \in V$ in W beschränkt, dann ist auch M in $\mathcal{L}(V; W)$ beschränkt.

Beweis. 1. Wegen $M \subset \mathcal{L}(V; W)$ sind die Mengen $\big\{u \in V : \|Tu\|_W \leq m\big\}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und $T \in M$ in V abgeschlossen und somit auch der Durchschnitt

$$E_m = \cap_{T \in M} \big\{u \in V : \|Tu\|_W \leq m\big\} = \big\{u \in V : \|Tu\|_W \leq m \text{ für alle } T \in M\big\}$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$. Da für jedes $u \in V$ die Menge $M(u) = \{Tu \in W : T \in M\}$ in W beschränkt ist, existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so daß $\|Tu\|_W \leq m$ für alle $T \in M$ gilt. Daraus ergibt sich $u \in E_m$ und somit $V = \cup_{m \in \mathbb{N}} E_m$.

2. Nach dem Kategoriensatz von Baire kann der Banach-Raum $(V, \| \ \|)$ *keine* abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Teilmengen von V sein, das heißt, es gibt einen Index $k \in \mathbb{N}$, so daß die Menge E_k *keine* nirgends dichte Menge ist. Da E_k abgeschlossen ist, folgt daraus $\operatorname{int} E_k = \operatorname{int} \operatorname{cl} E_k \neq \varnothing$. Somit existiert eine abgeschlossene Kugel $K(v, \delta) \subset E_k$ mit $\delta > 0$, mit anderen Worten, es gilt

$$\|Tu\|_W \leq k \quad \text{für jedes } T \in M \text{ und alle } u \in V \text{ mit } \|u - v\|_V \leq \delta.$$

Daraus folgt für jedes $T \in M$ und alle $u \in V$ mit $\|u\|_V = 1$ wegen $v \in E_k$ und $v + \delta u \in K(v, \delta) \subset E_k$ die Abschätzung

$$\|Tu\|_W = \tfrac{1}{\delta} \|T(v + \delta u) - Tv\|_W \leq \tfrac{2k}{\delta}$$

und somit $\|T\| \leq \frac{2k}{\delta}$ für alle $T \in M$. □

Lokal gleichmäßige und punktweise Konvergenz. Seien $(V, \| \ \|_V)$ ein Banach-Raum und $(W, \| \ \|_W)$ ein linearer normierter Raum über demselben Körper $\mathbb{K}$ sowie $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(V; W)$ eine Folge linearer stetiger Abbildungen.

1. Man sagt, die Folge $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert *lokal gleichmäßig* gegen einen Grenzwert $T \in \mathcal{L}(V; W)$, wenn $\lim_{k \to \infty} \|T_k - T\| = 0$ gilt.

2. Konvergiert die Folge $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *punktweise* gegen den Grenzwert $T : V \to W$, das heißt, gilt $\lim_{k \to \infty} \|T_k u - Tu\|_W = 0$ für alle $u \in V$, dann ist die Folge $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt in $\mathcal{L}(V; W)$, und für den Grenzwert gilt $T \in \mathcal{L}(V; W)$ sowie die Normabschätzung $\|T\| \leq \liminf_{k \to \infty} \|T_k\|$.

Beweis. 1. Konvergiert die Folge $\{T_k u\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W$ für jedes $u \in V$ in W gegen einen Grenzwert $Tu \in W$, dann ist die dadurch definierte Abbildung $T : V \to W$ linear: Geht man in der für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $u, v \in V$ geltenden Beziehung

$$\begin{aligned}\|T(\alpha u + \beta v) - (\alpha Tu + \beta Tv)\|_W &\le \|T(\alpha u + \beta v) - T_k(\alpha u + \beta v)\|_W \\ &\quad + |\alpha|\|T_k u - Tu\|_W + |\beta|\|T_k v - Tv\|_W\end{aligned}$$

zur Grenze $k \to \infty$ über, so erhält man $T(\alpha u + \beta v) = \alpha Tu + \beta Tv$.

2. Da für jedes $u \in V$ stets $\lim_{k\to\infty} \|T_k u\|_W = \|Tu\|_W$ gilt, ist die Folge $\{T_k u\}_{k\in\mathbb{N}}$ für jedes $u \in V$ in W beschränkt. Das Prinzip der gleichgradigen Beschränkheit liefert somit die Beschränktheit der Folge $\{\|T_k\|\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$. Daraus folgt

$$\|Tu\|_W = \lim_{k\to\infty} \|T_k u\|_W = \liminf_{k\to\infty} \|T_k u\|_W \le \liminf_{k\to\infty} \|T_k\| \|u\|_V$$

für alle $u \in V$ und somit $T \in \mathcal{L}(V; W)$ sowie $\|T\| \le \liminf_{k\to\infty} \|T_k\|$. □

Satz von Banach-Steinhaus. Seien $(V, \|\ \ \|_V)$ ein Banach-Raum und $(W, \|\ \ \|_W)$ ein linearer normierter Raum über demselben Körper $\mathbb{K}$. Die Folge $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(V; W)$ konvergiert genau dann punktweise gegen den Grenzwert $T_0 \in \mathcal{L}(V; W)$, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Folge $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(V; W)$ ist beschränkt in $\mathcal{L}(V; W)$.
2. Es gibt eine Menge $E \subset V$ mit $V = \operatorname{cl}\operatorname{lin} E$, so daß die Folge $\{T_k u\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W$ für jedes $u \in E$ in W gegen den Grenzwert $T_0 u \in W$ konvergiert.

Beweis. 1. Wegen des vorhergehenden Satzes folgt aus der punktweisen Konvergenz der Folge $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(V; W)$ die Beschränktheit der Folge $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}(V; W)$.

2. Seien umgekehrt die beiden angegebenen Bedingungen erfüllt. Aufgrund der Linearität der Abbildungen $T_k \in \mathcal{L}(V; W)$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ überträgt sich die Konvergenz $\lim_{k\in\mathbb{N}} \|T_k v - T_0 v\|_W = 0$ für alle $v \in E$ auf jedes $v \in \operatorname{lin} E$. Sollte $V = \operatorname{lin} E$ gelten, so ist damit der Beweis bereits erbracht.

Anderenfalls ist $\operatorname{lin} E$ ein *echter* linearer Teilraum von V. Sei $u \in V$, $u \notin \operatorname{lin} E$ beliebig gewählt. Wegen der Endlichkeit von $M = \sup_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \|T_k\|$ sowie $V = \operatorname{cl}\operatorname{lin} E$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $v \in \operatorname{lin} E$ mit $\|u - v\|_V \le \frac{\varepsilon}{4M}$. Zusammen mit

$$\begin{aligned}\|T_k u - T_0 u\|_W &\le \|T_k u - T_k v\|_W + \|T_k v - T_0 v\|_W + \|T_0 v - T_0 u\|_W \\ &\le \|T_k v - T_0 v\|_W + \big(\|T_k\| + \|T_0\|\big)\|u - v\|_V\end{aligned}$$

ergibt sich daraus

$$\|T_k u - T_0 u\|_W \le \|T_k v - T_0 v\|_W + \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Da $\lim_{k\to\infty} \|T_k v - T_0 v\|_W = 0$ für $v \in \operatorname{lin} E$ gilt, gibt es einen Index $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|T_k v - T_0 v\|_W \le \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \ge k_0$, woraus schließlich $\|T_k u - T_0 u\|_W \le \varepsilon$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, $k \ge k_0$ folgt. □

Konvergenz der Neumann-Reihe. Sind $(V, \| \ \|)$ ein Banach-Raum über $\mathbb{K}$ sowie $T \in \mathcal{L}(V; V)$ eine lineare stetige Abbildung, dann gelten die folgenden Aussagen:

1. Die Folge $\{\|T^\ell\|^{1/\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathbb{R}$ gegen den Grenzwert $\inf_{\ell\in\mathbb{N}} \|T^\ell\|^{1/\ell}$.

2. Die Neumann-Reihe $\{\sum_{\ell=0}^{k} T^\ell\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(V; V)$ konvergiert genau dann absolut in $\mathcal{L}(V; V)$, wenn ein Index $k \in \mathbb{N}$ mit $\|T^k\| < 1$ existiert.

3. In diesem Falle besitzt die lineare stetige Abbildung $I - T \in \mathcal{L}(V; V)$ eine Inverse $(I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(V; V)$, die zugleich die Summe der konvergenten Neumann-Reihe ist:

$$(I - T)^{-1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} T^\ell \in \mathcal{L}(V; V).$$

Beweis. 1. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ derart, so daß

$$\|T^k\|^{1/k} \leq d + \varepsilon \ \text{ für } \ d = \inf_{\ell\in\mathbb{N}} \|T^\ell\|^{1/\ell} \ \text{ gilt.}$$

Setzt man $M = \max_{0\leq\ell\leq k-1} \|T^\ell\|$ und wird ein beliebiger Index $\ell \in \mathbb{N}$ bezüglich der Restklasse modulo k durch $\ell = kq_\ell + r_\ell$ mit $q_\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sowie $r_\ell \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ dargestellt, dann gilt

$$\|T^\ell\|^{1/\ell} = \|T^{r_\ell} T^{kq_\ell}\|^{1/\ell} \leq \|T^{r_\ell}\|^{1/\ell} \|T^{kq_\ell}\|^{1/\ell} \leq M^{1/\ell} \|T^k\|^{q_\ell/\ell} \leq M^{1/\ell}(d + \varepsilon)^{kq_\ell/\ell}$$

und somit $\|T^\ell\|^{1/\ell} \leq M^{1/\ell}(d+\varepsilon)^{1-r_\ell/\ell}$. Da $\lim_{\ell\to\infty} M^{1/\ell}(d+\varepsilon)^{1-r_\ell/\ell} = d + \varepsilon$ gilt, kann man ein $\ell_0 \in \mathbb{N}$ finden, so daß $M^{1/\ell}(d+\varepsilon)^{1-r_\ell/\ell} \leq d + 2\varepsilon$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell \geq \ell_0$ gilt, das heißt, man erhält

$$d \leq \|T^\ell\|^{1/\ell} \leq d + 2\varepsilon \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}, \ell \geq \ell_0,$$

woraus sich schließlich $\lim_{\ell\to\infty} \|T^\ell\|^{1/\ell} = d = \inf_{\ell\in\mathbb{N}} \|T^\ell\|^{1/\ell}$ ergibt.

2. Konvergiert die Neumann-Reihe $\{\sum_{\ell=0}^{k} T^\ell\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}(V; V)$, dann existiert nach dem Cauchy-Kriterium für jedes $\varepsilon \in (0, 1)$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß die Abschätzung

$$\left\|\sum_{\ell=k+1}^{k+m} T^\ell\right\| = \left\|\sum_{\ell=0}^{k+m} T^\ell - \sum_{\ell=0}^{k} T^\ell\right\| \leq \varepsilon$$

für alle $k, m \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$ gilt, also insbesondere $\|T^{k+1}\| \leq \varepsilon < 1$ für jedes $k \geq k_0$.

Gilt umgekehrt $\|T^k\| < 1$ für einen Index $k \in \mathbb{N}$, dann ergibt sich aus Schritt 1

$$\lim_{\ell\to\infty} \|T^\ell\|^{1/\ell} = \inf_{\ell\in\mathbb{N}} \|T^\ell\|^{1/\ell} \leq \|T^k\|^{1/k} < 1.$$

Wählt man ein $q \in \mathbb{R}$ mit $\|T^k\|^{1/k} \leq q < 1$ und ein $\ell_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$\|T^\ell\| \leq q^\ell \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}, \ell \geq \ell_0$$

gilt, dann wird die Reihe $\{\sum_{\ell=\ell_0}^{k} \|T^\ell\|\}_{k\in\mathbb{N}}$ durch die wegen $0 \leq q < 1$ konvergente geometrische Reihe $\{\sum_{\ell=\ell_0}^{k} q^\ell\}_{k\in\mathbb{N}}$ majorisiert. Aus diesem Grunde konvergiert die Neumann-Reihe $\{\sum_{\ell=0}^{k} T^\ell\}_{k\in\mathbb{N}}$ absolut in $\mathcal{L}(V; V)$.

3. In diesem Falle konvergiert die Neumann-Reihe $\{\sum_{\ell=0}^{k} T^\ell\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(V;V)$ gegen einen Grenzwert $A = \sum_{\ell=0}^{\infty} T^\ell \in \mathcal{L}(V;V)$. Da für alle $k \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$(I-T)\sum_{\ell=0}^{k} T^\ell = \sum_{\ell=0}^{k} T^\ell (I-T) = \sum_{\ell=0}^{k} T^\ell - \sum_{\ell=1}^{k+1} T^\ell = I - T^{k+1}$$

gilt und man nach Schritt 2 für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$ stets die Normabschätzung $\|T^{k+1}\| \leq \varepsilon$ bekommt, ergibt sich

$$\Big\|(I-T)\sum_{\ell=0}^{k} T^\ell - I\Big\| = \Big\|\sum_{\ell=0}^{k} T^\ell (I-T) - I\Big\| \leq \varepsilon \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{N}, k \geq k_0$$

und somit $(I-T)A = A(I-T) = I$, das heißt, $(I-T)^{-1} = A \in \mathcal{L}(V;V)$. $\square$