Vorlesung 15

Duale Räume und punktweise Konvergenz

Duale Räume. Ist $(V, \| \ \|_V)$ ein Banach-Raum über $\mathbb{K}$, so wird der mit der Norm

$$\|f\|_{V^*} = \sup\left\{|\langle f, u\rangle| : u \in V,\ \|u\|_V \leq 1\right\} \quad \text{für } f \in \mathcal{L}(V; \mathbb{K})$$

ausgestattete Banach-Raum $V^* = \mathcal{L}(V; \mathbb{K})$ *dualer Raum* von $(V, \| \ \|_V)$ genannt.

Prinzip der gleichgradigen Beschränktheit für Funktionale. Sei $(V, \| \ \|_V)$ ein Banach-Raum über $\mathbb{K}$ sowie $E \subset V^*$. Ist die Menge $\left\{\langle f, u\rangle \in \mathbb{K} : f \in E\right\}$ für jedes $u \in V$ in $\mathbb{K}$ beschränkt, dann ist auch E in V^* beschränkt.

Punktweise Konvergenz von Funktionalen. Sei $(V, \| \ \|_V)$ ein Banach-Raum über dem Körper $\mathbb{K}$. Konvergiert die Folge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V^*$ auf V punktweise gegen einen Grenzwert $f : V \to \mathbb{K}$, das heißt, gilt $\lim_{k\to\infty}\langle f_k, u\rangle = \langle f, u\rangle$ für alle $u \in V$, dann ist die Folge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt in V^*, und für den Grenzwert gilt $f \in V^*$ sowie die Normabschätzung $\|f\|_{V^*} \leq \liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_{V^*}$.

Satz von Banach-Steinhaus für Funktionale. Ist $(V, \| \ \|_V)$ ein Banach-Raum über dem Körper $\mathbb{K}$, so konvergiert die Folge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V^*$ genau dann punktweise auf V gegen den Grenzwert $f \in V^*$, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Folge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V^*$ ist beschränkt in V^*.
2. Es gibt eine Menge $D \subset V$ mit $V = \operatorname{cl}\operatorname{lin} D$, so daß die Folge $\{\langle f_k, u\rangle\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ für jedes $u \in D$ in $\mathbb{K}$ gegen den Grenzwert $\langle f, u\rangle \in \mathbb{K}$ konvergiert.

Konvergenzkriterium. Sei $(V, \| \ \|_V)$ ein Banach-Raum über $\mathbb{K}$. Konvergiert die Folge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V^*$ punktweise auf V gegen den Grenzwert $f \in V^*$ und die Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ in V gegen den Grenzwert $u \in V$, dann gilt $\lim_{k\to\infty}\langle f_k, u_k\rangle = \langle f, u\rangle$.

Beweis. Unter den angegebenen Voraussetzungen gilt die Abschätzung

$$|\langle f_k, u_k\rangle - \langle f, u\rangle| \leq |\langle f_k, u_k - u\rangle| + |\langle f_k - f, u\rangle| \leq \|f_k\|_{V^*}\|u_k - u\|_V + |\langle f_k - f, u\rangle|$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Da die Folge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ nach dem Satz von Banach-Steinhaus in V^* beschränkt ist sowie $\lim_{k\to\infty}\|u_k - u\|_V = 0$ und $\lim_{k\to\infty}|\langle f_k - f, u\rangle| = 0$ gelten, folgt daraus $\lim_{k\to\infty}\langle f_k, u_k\rangle = \langle f, u\rangle$. $\square$

Topologie der punktweisen Konvergenz. Sei $(V, \| \ \|_V)$ ein Banach-Raum über $\mathbb{K}$.

1. Eine Teilmenge $E \subset V^*$ heißt *offen bezüglich der punktweisen Konvergenz*, wenn es für jedes $f \in E$ Zahlen $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N}$ sowie Elemente $v_1, \dots, v_n \subset V$ gibt, so daß

$$\big\{g \in V^* : \sup_{1 \le \ell \le n} |\langle g - f, v_\ell\rangle| < \delta\big\} \subset E.$$

2. Eine Folge $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V^*$ konvergiert genau dann punktweise gegen $f \in V^*$, wenn es für jede bezüglich der punktweisen Konvergenz offene Menge $E \subset V^*$ mit $f \in E$ einen Index $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $f_k \in E$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \ge k_0$ gilt.

Beweis. Seien $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V^*$ eine Folge und $f \in V^*$ ein Funktional, so daß es für jede bezüglich der punktweisen Konvergenz offene Menge $E \subset V^*$ mit $f \in E$ einen Index $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $f_k \in E$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \ge k_0$ gilt. Wird $v \in V$ beliebig fixiert, so betrachtet man für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ die bezüglich der punktweisen Konvergenz offene Menge

$$E_\ell = \big\{g \in V^* : |\langle g - f, v\rangle| < \tfrac{1}{\ell}\big\} \subset V^* \ \text{ mit } f \in E_\ell.$$

Nach Voraussetzung existiert dann für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ ein $k_\ell \in \mathbb{N}$, so daß $f_k \in E_\ell$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \ge k_\ell$ gilt, das heißt,

$$|\langle f_k - f, v\rangle| < \tfrac{1}{\ell} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, k \ge k_\ell \text{ und } \ell \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt $\limsup_{k \to \infty} |\langle f_k - f, v\rangle| \le \frac{1}{\ell}$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ und somit die punktweise Konvergenz $\lim_{k \to \infty} |\langle f_k - f, v\rangle| = 0$ für jedes $v \in V$.

Sei umgekehrt $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V^*$ eine Folge, die punktweise gegen einen Grenzwert $f \in V^*$ konvergiert, das heißt, es gilt $\lim_{k \to \infty} |\langle f_k - f, v\rangle| = 0$ für alle $v \in V$. Sei ferner eine bezüglich der punktweisen Konvergenz offene Menge

$$E = \big\{g \in V^* : \sup_{1 \le \ell \le n} |\langle g - f, v_\ell\rangle| < \delta\big\} \subset V^* \ \text{ mit } f \in E$$

für beliebige $n \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ sowie $v_1, \dots, v_n \in V$ vorgegeben. Da nach Voraussetzung $\lim_{k \to \infty} |\langle f_k - f, v_\ell\rangle| = 0$ für alle $\ell \in \{1, \dots, n\}$ gilt, existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß $f_k \in E$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \ge k_0$ gilt. □

3. Eine Teilmenge $K \subset V^*$ heißt *relativ kompakt bezüglich punktweiser Konvergenz*, wenn für jede Folge $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset K$ eine wachsende Folge $\{k_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ existiert, so daß $\{f_{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}} \subset K$ punktweise auf V gegen einen Grenzwert $f \in V^*$ konvergiert.

4. Man nennt eine Teilmenge $K \subset V^*$ *kompakt bezüglich punktweiser Konvergenz*, wenn für jede Folge $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset K$ eine wachsende Folge $\{k_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ existiert, so daß $\{f_{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}} \subset K$ punktweise auf V gegen einen Grenzwert $f \in K$ konvergiert.

Beschränktheit relativ kompakter Mengen. Ist $(V, \| \ \|_V)$ ein Banach-Raum über dem Körper $\mathbb{K}$, dann ist jede bezüglich der punktweisen Konvergenz relativ kompakte Menge $K \subset V^*$ in V^* beschränkt.

Beweis. Wäre die bezüglich der punktweisen Konvergenz relativ kompakte Menge K in V^* unbeschränkt, so könnte man nach dem Prinzip der gleichgradigen Beschränktheit ein $u \in V$ finden, so daß $\big\{\langle f, u\rangle \in \mathbb{K} : f \in K\big\}$ unbeschränkt wäre. Somit gäbe es eine Folge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$, so daß $|\langle f_k, u\rangle| \geq k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gälte, was der Existenz einer punktweise konvergenten Teilfolge von $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ widerspräche. □

Metrisierung des dualen Raums eines separablen Banach-Raums. Ist $(V, \| \ \|_V)$ ein separabler Banach-Raum über $\mathbb{K}$, $D = \{v_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare dichte Menge in V und K eine in V^* beschränkte Teilmenge, so gelten folgende Aussagen:

1. Analog zur Metrik im Raum (s, ρ) aller Zahlenfolgen wird durch die Vorschrift
$$d(f, g) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{2^\ell} \frac{|\langle f - g, v_\ell\rangle|}{1 + |\langle f - g, v_\ell\rangle|} \quad \text{für } f, g \in V^*$$
eine Metrik $d : V^* \times V^* \to \mathbb{R}$ auf V^* definiert.

2. Eine Folge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ konvergiert genau dann punktweise gegen $f \in V^*$, wenn $\lim_{k\to\infty} d(f_k, f) = 0$ gilt.

3. Die Teilmenge $K \subset V^*$ ist genau dann (relativ) kompakt bezüglich punktweiser Konvergenz, wenn sie (relativ) kompakt im metrischen Raum (V^*, d) ist.

Beweis. Sei $A : V^* \to s$ die Abbildung, die jedem Funktional $f \in V^*$ die Folge $\{\langle f, v_\ell\rangle\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in s$ der Werte des Funktionals auf $D = \{v_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset V$ zuordnet.

1. Offenbar gilt für alle $f, g \in V^*$ stets $d(f, g) = d(g, f) \geq 0$. Im Falle $d(f, g) = 0$ ergibt sich nach Definition $\langle f - g, v_\ell\rangle = 0$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ und somit $\langle f - g, v\rangle = 0$ für jedes $v \in \operatorname{lin} D$. Da der lineare Teilraum $\operatorname{lin} D$ in V dicht ist, liefert der Satz über die Erweiterung durch Abschließung schließlich $f = g$ in V^*.

Für alle $f, g, h \in V^*$ gilt $\rho(Af, Ah) \leq \rho(Af, Ag) + \rho(Ag, Ah)$ im metrischen Raum (s, ρ), woraus sich unmittelbar $d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h)$ ergibt.

2. Es gilt genau dann $\lim_{k\to\infty} d(f_k, f) = \lim_{k\to\infty} \rho(Af_k, Af) = 0$ für $f \in V^*$ und $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$, wenn die Konvergenzbeziehung $\lim_{k\to\infty}\langle f_k, v_\ell\rangle = \langle f, v_\ell\rangle$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ gilt. Wegen der Dichtheit von $D = \{v_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ in V und der Beschränktheit der Teilmenge K in V^* ist dies nach dem Satz von Banach-Steinhaus äquivalent zur punktweisen Konvergenz von $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ gegen $f \in V^*$.

3. Die Menge $K \subset V^*$ ist genau dann relativ kompakt bezüglich punktweiser Konvergenz, wenn es für jede Folge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ eine wachsende Folge $\{k_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ gibt, so daß $\{f_{k_m}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset K$ punktweise gegen einen Grenzwert $f \in V^*$ konvergiert. Dies ist nach Schritt 2 gleichbedeutend mit $\lim_{m\to\infty} d(f_{k_m}, f) = 0$ und somit äquivalent zur relativen Kompaktkeit von K im metrischen Raum (V^*, d).

4. Die Teilmenge $K \subset V^*$ ist genau dann kompakt bezüglich punktweiser Konvergenz, wenn für jede Folge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ eine wachsende Folge $\{k_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ existiert, so daß $\{f_{k_m}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset K$ punktweise gegen einen Grenzwert $f \in K$ konvergiert. Dies ist nach Schritt 2 äquivalent zu $\lim_{m\to\infty} d(f_{k_m}, f) = 0$ und daher gleichbedeutend mit der Kompaktkeit von K im metrischen Raum (V^*, d). □

Satz von Banach-Alaoglu. Ist $(V, \|\ \|_V)$ ein separabler Banach-Raum über $\mathbb{K}$ und $D = \{v_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare dichte Menge in V, so gelten folgende Aussagen:

1. Jede beschränkte Teilmenge $K \subset V^*$ ist relativ kompakt in (V^*, d).
2. Die abgeschlossene Kugel $\{f \in V^* : \|f\|_{V^*} \le 1\}$ ist kompakt in (V^*, d).

Beweis. Sei $A : V^* \to s$ die Abbildung, die jedem Funktional $f \in V^*$ die Folge $\{\langle f, v_\ell\rangle\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in s$ der Werte des Funktionals auf $D = \{v_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset V$ zuordnet.

1. Ist K eine in V^* beschränkte Teilmenge, dann gibt es eine Schranke $M > 0$ mit $\|f\|_{V^*} \le M$ für alle $f \in K$, woraus sich die Abschätzung

$$|\langle f, v_\ell\rangle| \le \|f\|_{V^*}\|v_\ell\|_V \le M\|v_\ell\|_V \quad \text{für alle } f \in K \text{ und } \ell \in \mathbb{N} \text{ ergibt.}$$

Damit ist die Menge $\{\langle f, v_\ell\rangle \in \mathbb{K} : f \in K\}$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ relativ kompakt in $\mathbb{K}$ und somit die Menge $A[K]$ relativ kompakt im metrischen Raum (s, ρ) aller Zahlenfolgen.

Sei $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ eine beliebig vorgegebene Folge. Dann gibt es wegen der relativen Kompaktheit von $A[K]$ in (s, ρ) eine wachsende Teilfolge $\{k_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ und ein Folge $w = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in s$, so daß $\lim_{m\to\infty} \rho(Af_{k_m}, w) = 0$ und somit

$$\lim_{m\to\infty} \langle f_{k_m}, v_\ell\rangle = x_\ell \quad \text{für jedes } \ell \in \mathbb{N} \text{ gilt.}$$

Werden $u \in V$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, dann findet man Zahlen $n \in \mathbb{N}$ sowie $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$, so daß $\|u - v\|_V \le \frac{\varepsilon}{3M}$ für $v = \sum_{\ell=1}^p \alpha_\ell v_\ell \in \operatorname{lin} D$ gilt. Außerdem folgt $\lim_{m\to\infty}\langle f_{k_m}, v\rangle = \sum_{\ell=1}^p \alpha_\ell x_\ell \in \mathbb{K}$. Damit gibt es einen Index $m_0 \in \mathbb{N}$, so daß $|\langle f_{k_m} - f_{k_n}, v\rangle| \le \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $m, n \in \mathbb{N}, m, n \ge m_0$ gilt, woraus sich die Abschätzung

$$\begin{aligned}|\langle f_{k_m} - f_{k_n}, u\rangle| &\le |\langle f_{k_m}, u - v\rangle| + |\langle f_{k_m} - f_{k_n}, v\rangle| + |\langle f_{k_n}, u - v\rangle| \\ &\le \big(\|f_{k_m}\|_{V^*} + \|f_{k_n}\|_{V^*}\big)\|u - v\|_V + |\langle f_{k_m} - f_{k_n}, v\rangle| \le \varepsilon\end{aligned}$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}, m, n \ge m_0$ ergibt. Damit konvergiert $\{\langle f_{k_m}, u\rangle\}_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ für jedes $u \in V$ gegen einen Grenzwert $\langle f, u\rangle \in \mathbb{K}$, wodurch ein Funktional $f \in V^*$ mit $\|f\|_{V^*} \le \liminf_{m\to\infty} \|f_{k_m}\|_{V^*} \le M$ definiert wird. Somit konvergiert die Teilfolge $\{f_{k_m}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset K$ punktweise gegen den Grenzwert $f \in V^*$, woraus sich die Beziehung $\lim_{m\to\infty} d(f_{k_m}, f) = 0$, also die relative Kompaktheit von K in (V^*, d) ergibt.

2. Für die Kugel $K = \{f \in V^* : \|f\|_{V^*} \le 1\}$ liefert die obige Argumentation, daß man für jede Folge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ eine wachsende Teilfolge $\{k_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ finden kann, so daß $\{f_{k_m}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset K$ im metrischen Raum (V^*, d) gegen einen Grenzwert $f \in K$ konvergiert. Damit ist die abgeschlossene Kugel K kompakt in (V^*, d). □