Vorlesung 16

Kompaktheit und punktweise Konvergenz

Satz von Banach-Mazur über die Universalität des Raums stetiger Funktionen. Für jeden separablen Banach-Raum $(V, \|\ \|_V)$ über $\mathbb{K}$ gibt es eine lineare Isometrie $T \in \mathcal{L}(V; W)$ von V auf einen abgeschlossenen linearen Teilraum W des separablen Banach-Raums $(BC([0,1];\mathbb{K}), \|\ \|_\infty)$.

Beweis. 1. Sei $(V, \|\ \|_V)$ ein separabler Banach-Raum über $\mathbb{K}$ und $D = \{v_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare dichte Menge in V. Nach dem Satz von Banach-Alaoglu ist die abgeschlossene Einheitskugel $K = \left\{f \in V^* : \|f\|_{V^*} \leq 1\right\}$ eine kompakte Teilmenge des metrischen Raums (V^*, d) bezüglich der punktweisen Konvergenz auf V.

2. Aufgrund der Universalität der Cantor-Menge $C \subset [0,1]$ existiert somit eine stetige Abbildung $\Lambda : C \to (V^*, d)$ mit $\Lambda[C] = K$. Konvergiert also eine Folge $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C$ gegen einen Grenzwert $y \in C$, dann gilt $\lim_{m\to\infty} d(\Lambda y_m, \Lambda y) = 0$. Somit konvergiert die Folge $\{\Lambda y_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset K$ punktweise gegen $\Lambda y \in K$, also gilt $\lim_{m\to\infty}\langle \Lambda y_m, u\rangle = \langle \Lambda y, u\rangle$ für alle $u \in V$. Demzufolge wird durch die Zuordnung $y \mapsto \langle \Lambda y, u\rangle$ für jedes $u \in V$ eine stetige Funktion $T_0 u : C \to \mathbb{K}$ auf der Cantor-Menge $C \subset [0,1]$ definiert.

3. Der Satz über die stetige Erweiterung durch stückweise affine Fortsetzung liefert für jedes $u \in V$ eine stetige Erweiterung $Tu : [0,1] \to \mathbb{K}$ mit $Tu|C = T_0 u : C \to \mathbb{K}$, die auf $[0,1] \setminus C$ stückweise affin ist und die Norm invariant läßt, das heißt, es gilt

$$\max_{y\in[0,1]} |Tu(y)| = \max_{y\in C} |T_0 u(y)|.$$

4. Da für jedes $y \in C$ sowie für alle $u, v \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ stets

$$\langle \Lambda y, \alpha u + \beta v\rangle = \alpha\langle \Lambda y, u\rangle + \beta\langle \Lambda y, v\rangle$$

gilt, folgt zunächst die Stetigkeit von $T_0(\alpha u + \beta v) = \alpha T_0 u + \beta T_0 v : C \to \mathbb{K}$. Wegen der stückweisen Affinität der Erweiterungen auf $[0,1] \setminus C$ ergibt sich für alle $u, v \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ auch die Stetigkeit von $T(\alpha u + \beta v) = \alpha Tu + \beta Tv : [0,1] \to \mathbb{K}$. Damit ist $T : V \to BC([0,1];\mathbb{K})$ eine lineare Abbildung, und Schritt 2 und 3 liefert für alle $u, v \in V$ die Beziehung

$$\max_{y\in[0,1]} |Tu(y) - Tv(y)| = \max_{y\in C} |T_0 u(y) - T_0 v(y)| = \max_{y\in C} |\langle \Lambda y, u - v\rangle|.$$

5. Seien $u, v \in V$ beliebig fixiert. Da $\Lambda y \in K$ für alle $y \in C$ gilt, ergibt sich einerseits die Abschätzung

$$|\langle \Lambda y, u - v\rangle| \leq \|\Lambda y\|_{V^*}\|u - v\|_V \leq \|u - v\|_V,$$

also $\max_{y\in C} |\langle \Lambda y, u - v\rangle| \leq \|u - v\|_V$.

Andererseits kann man wegen der Separabilität von $(V, \| \ \|_V)$ den Trennungssatz anwenden, um ein Funktional $f_0 \in V^*$ mit $\|f_0\|_{V^*} = 1$ und $\langle f_0, u - v\rangle = \|u - v\|_V$ zu finden. Wegen $f_0 \in K$ und $\Lambda[C] = K$ gibt es somit einen Punkt $y_0 \in C$ mit $\Lambda y_0 = f_0 \in K$, woraus sich $\langle \Lambda y_0, u - v\rangle = \|u - v\|_V$ ergibt und folglich auch

$$\|u - v\|_V = \langle \Lambda y_0, u - v\rangle \leq \max_{y \in C} |\langle \Lambda y, u - v\rangle| \leq \|u - v\|_V.$$

Wegen Schritt 4 erhält man schließlich

$$\max_{y \in [0,1]} |Tu(y) - Tv(y)| = \max_{y \in C} |\langle \Lambda y, u - v\rangle| = \|u - v\|_V \quad \text{für alle } u, v \in V.$$

Damit ist $T : V \to BC([0,1];\mathbb{K})$ eine lineare Isometrie von $(V, \| \ \|_V)$ auf den linearen Teilraum $W = T[V]$ von $(BC([0,1];\mathbb{K}), \| \ \|_\infty)$, der wegen der Vollständigkeit von $(V, \| \ \|_V)$ ebenfalls vollständig und somit abgeschlossen ist. $\square$

Kompaktheitskriterium von Gelfand. Sei $(V, \| \ \|_V)$ Banach-Raum und $K \subset V$.

1. Ist K relativ kompakt in V, dann existiert für jede punktweise gegen $0 \in V^*$ konvergierende Folge $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V^*$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$|\langle f_k, u\rangle| < \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, k \geq k_0 \text{ sowie jedes } u \in K \text{ gilt.}$$

2. Ist $(V, \| \ \|_V)$ separabel und gibt es für jede punktweise gegen $0 \in V^*$ konvergierende Folge $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V^*$ und jedes $\varepsilon > 0$ einen Index $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$|\langle f_k, u\rangle| < \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, k \geq k_0 \text{ sowie jedes } u \in K \text{ gilt,}$$

dann ist K relativ kompakt in V.

Beweis. 1. Sei K relativ kompakt in V, $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V^*$ eine Folge, die punktweise gegen $0 \in V^*$ konvergiert und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Da $(V, \| \ \|_V)$ ein Banach-Raum ist und die Folge $\{\langle f_k, u\rangle\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ für jedes $u \in V$ in $\mathbb{K}$ beschränkt ist, liefert das Prinzip der gleichgradigen Beschränktheit die Existenz einer Schranke $M > 0$, so daß $\|f_k\|_{V^*} \leq M$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Da K relativ kompakt in V ist, gibt es nach dem Hausdorff-Kriterium ein endliches $\frac{\varepsilon}{2M}$-Netz $\{v_1, \ldots, v_m\} \subset K$ für K.

Wegen der punktweisen Konvergenz von $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V^*$ gegen $0 \in V^*$ existiert für jedes $\ell \in \{1, \ldots, m\}$ ein Index $k_\ell \in \mathbb{N}$ mit

$$|\langle f_k, v_\ell\rangle| < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, k \geq k_\ell \text{ sowie jedes } \ell \in \{1, \ldots, m\}.$$

Da man außerdem zu jedem $u \in K$ ein $\ell \in \{1, \ldots, m\}$ mit $\|u - v_\ell\|_V < \frac{\varepsilon}{2M}$ finden kann, erhält man die Abschätzung

$$|\langle f_k, u\rangle| \leq |\langle f_k, v_\ell\rangle| + |\langle f_k, u - v_\ell\rangle| \leq |\langle f_k, v_\ell\rangle| + \|f_k\|_{V^*}\|u - v_\ell\|_V < \varepsilon$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0 = \max\{k_1, \ldots, k_m\}$ und jedes $u \in K$.

2. Sei $(V, \| \ \|_V)$ ein separabler Banach-Raum und $K \subset V$ eine Teilmenge, so daß für jede punktweise gegen $0 \in V^*$ konvergierende Folge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V^*$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß

$$|\langle f_k, u\rangle| < \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, k \geq k_0 \text{ sowie jedes } u \in K \text{ gilt.}$$

Angenommen, die Menge $K \subset V$ wäre unbeschränkt. Dann könnte man Folgen $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ und $\{\delta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ finden, so daß $\|u_k\|_V = \delta_k^2$ und $\delta_k \geq k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Nach dem Trennungssatz gäbe es für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein Funktional $g_k \in V^*$ mit $\|g_k\|_{V^*} = 1$ und $\langle g_k, u_k\rangle = \|u_k\|_V$. Für die durch $f_k = \frac{1}{\delta_k} g_k \in V^*$ definierte Folge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V^*$ bekäme man $\lim_{k\to\infty} \|f_k\|_{V^*} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\delta_k} = 0$, aber gleichzeitig auch $\langle f_k, u_k\rangle = \frac{1}{\delta_k}\langle g_k, u_k\rangle = \frac{1}{\delta_k}\|u_k\|_V = \delta_k \geq k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit ist die Menge K in V beschränkt.

3. Wegen der Universalität des Raums $(BC([0,1];\mathbb{K}), \| \ \|_\infty)$ gibt es eine lineare Isometrie $T \in \mathcal{L}(V; W)$ des separablen Banach-Raums V auf einen abgeschlossenen Teilraum $W = T[V]$ von $BC([0,1];\mathbb{K})$. Es soll mit Hilfe des Satzes von Ascoli gezeigt werden, daß $T[K]$ relativ kompakt in $(BC([0,1];\mathbb{K}), \| \ \|_\infty)$ ist: Offenbar ist das isometrische Bild $T[K]$ der in V beschränkten Menge K in $BC([0,1];\mathbb{K})$ beschränkt.

4. Angenommen, die Menge $T[K] \subset BC([0,1];\mathbb{K})$ wäre nicht gleichmäßig gleichgradig stetig. Dann könnte man ein $\varepsilon > 0$, eine Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ sowie zwei Zahlenfolgen $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ finden, so daß

$$|x_k - y_k| \leq \tfrac{1}{k} \quad \text{und} \quad |Tu(x_k) - Tu(y_k)| \geq \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ gelten würde}$$

und durch Auswahl einer Teilfolge erreicht werden, daß $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ und damit auch $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ gegen einen Grenzwert $x_0 \in [0,1]$ konvergieren würde.

5. Durch die Vorschrift

$$\langle f_k, u\rangle = Tu(x_k) - Tu(y_k) \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \text{ und } u \in V$$

würde eine Folge von linearen Abbildungen $f_k : V \to \mathbb{K}$ definiert werden, denn für alle $u, v \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ erhielte man wegen $T \in \mathcal{L}(V; W)$ die Identität

$$\begin{aligned}\langle f_k, \alpha u + \beta v\rangle &= T(\alpha u + \beta v)(x_k) - T(\alpha u + \beta v)(y_k)\\ &= \alpha\big(Tu(x_k) - Tu(y_k)\big) + \beta\big(Tv(x_k) - Tv(y_k)\big)\\ &= \alpha\langle f_k, u\rangle + \beta\langle f_k, v\rangle\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Außerdem ergäbe sich für alle $k \in \mathbb{N}$ und $u \in V$ die Abschätzung

$$|\langle f_k, u\rangle| = |Tu(x_k) - Tu(y_k)| \leq |Tu(x_k)| + |Tu(y_k)| \leq 2 \max_{y\in[0,1]} |Tu(y)| = 2\|u\|_V,$$

das heißt, man bekäme $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V^*$ sowie $\|f_k\|_{V^*} \leq 2$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

6. Da $Tu \in BC([0,1];\mathbb{K})$ eine stetige Funktion ist, erhielte man nach Schritt 4

$$\lim_{k\to\infty} \langle f_k, u\rangle = \lim_{k\to\infty} \big(Tu(x_k) - Tu(y_k)\big) = Tu(x_0) - Tu(x_0) = 0 \quad \text{für jedes } u \in V$$

und somit die punktweise Konvergenz der Folge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V^*$ gegen $0 \in V^*$. Nach Voraussetzung würde somit ein Index $k_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so daß

$$|Tu(x_k) - Tu(y_k)| = |\langle f_k, u\rangle| < \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N},\, k \geq k_0 \text{ sowie jedes } u \in K$$

gelten würde, was der Wahl der Folgen $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ in Schritt 4 widerspräche. Damit ist die gleichmäßig gleichgradige Stetigkeit von $T[K] \subset BC([0,1];\mathbb{K})$ bewiesen. Der Satz von Ascoli liefert somit die relative Kompaktheit der Menge $T[K]$ in $BC([0,1];\mathbb{K})$, woraus sich schließlich die relative Kompaktheit des isometrischen Urbilds K in V ergibt. $\square$