Vorlesung 17

Biduale Räume und schwache Konvergenz

Biduale Räume. Sei $(V, \|\ \|_V)$ ein Banach-Raum über $\mathbb{K}$.

1. Man bezeichnet den mit der Norm

$$\|h\|_{V^{**}} = \sup\left\{|\langle h, f\rangle| : f \in V^*,\ \|f\|_{V^*} \le 1\right\} \quad \text{für } h \in \mathcal{L}(V^*;\mathbb{K})$$

ausgestatteten Banach-Raum $V^{**} = \mathcal{L}(V^*;\mathbb{K})$ als *bidualen Raum* von $(V, \|\ \|_V)$.

2. Jedem $u \in V$ wird durch die Vorschrift

$$\langle Ju, f\rangle = \langle f, u\rangle \quad \text{für alle } f \in V^*$$

ein Funktional $Ju \in V^{**}$ zugeordnet. Die dadurch definierte lineare stetige Abbildung $J \in \mathcal{L}(V; V^{**})$ heißt *natürliche Einbettung von V in den bidualen Raum V^{**}*.

Beweis. Sei $u \in V$ vorgegeben. Aufgrund der Definition $\langle Ju, f\rangle = \langle f, u\rangle$ und der Abschätzung $|\langle Ju, f\rangle| \le \|f\|_{V^*}\|u\|_V$ für alle $f \in V^*$ ist $Ju : V^* \to \mathbb{K}$ eine lineare stetige Abbildung mit $\|Ju\|_{V^{**}} \le \|u\|_V$ für jedes $u \in V$. Somit wird nach Definition $\langle Ju, f\rangle = \langle f, u\rangle$ durch die Zuordnung $u \mapsto Ju$ eine lineare und stetige Abbildung $J : V \to V^{**}$ definiert. □

Duale Norm in separablen Banach-Räumen. Ist $(V, \|\ \|_V)$ ein separabler Banach-Raum über $\mathbb{K}$, so gelten die folgenden Aussagen:

1. Für jedes $u \in V$, $u \ne 0$ gibt es ein $f \in V^*$ mit $\|f\|_{V^*} = 1$ und $\langle f, u\rangle = \|u\|_V$.
2. Erfüllt $u \in V$ die Identität $\langle f, u\rangle = 0$ für alle $f \in V^*$, dann gilt $u = 0$.
3. Für alle $u \in V$ gilt $\|u\|_V = \sup\left\{|\langle f, u\rangle| : f \in V^*,\ \|f\|_{V^*} \le 1\right\}$.

Beweis. 1. Für jedes $u \in V$ mit $\|u\|_V > 0$ liefert der Trennungssatz für den linearen Teilraum $V_0 = \{0\}$ des separablen Banach-Raums $(V, \|\ \|_V)$ die Existenz eines Funktionals $f \in V^*$ mit $\langle f, u\rangle = \inf\left\{\|u - v\|_V : v \in V_0\right\} = \|u\|_V$ und $\|f\|_{V^*} = 1$.

2. Hat $u \in V$ die Eigenschaft, daß $\langle f, u\rangle = 0$ für alle $f \in V^*$ gilt, dann folgt aus Schritt 1 sofort $u = 0$.

3. Sei $u \in V$ beliebig fixiert. Da $|\langle g, u\rangle| \le \|g\|_{V^*}\|u\|_V$ für jedes $g \in V^*$ gilt, folgt

$$\sup\left\{|\langle g, u\rangle| : g \in V^*,\ \|g\|_{V^*} \le 1\right\} \le \|u\|_V.$$

Da im Falle $u = 0$ nichts zu beweisen ist, kann man annehmen, daß $\|u\|_V > 0$ gilt. Aus Schritt 1 folgt die Existenz eines Funktionals $f \in V^*$ mit $\|f\|_{V^*} = 1$ und $\langle f, u\rangle = \|u\|_V$. Zusammen mit der obigen Abschätzung ergibt sich daraus

$$\|u\|_V = \langle f, u\rangle \le \sup\left\{|\langle g, u\rangle| : g \in V^*,\ \|g\|_{V^*} \le 1\right\} \le \|u\|_V,$$

womit die Behauptung bewiesen ist. □

Isometrische Einbettung separabler Banach-Räume in ihre bidualen Räume. Ist $(V, \| \ \|_V)$ ein separabler Banach-Raum über $\mathbb{K}$, dann ist die natürliche Einbettung $J \in \mathcal{L}(V; V^{**})$ von V in den bidualen Raum V^{**} eine Isometrie von V auf den abgeschlossenen linearen Teilraum $J[V]$ von V^{**}.

Beweis. Aufgrund der Definition $\langle Ju, g\rangle = \langle g, u\rangle$ für $g \in V^*$ und $u \in V$ gilt für die natürliche Einbettung $J \in \mathcal{L}(V; V^{**})$ von V in den bidualen Raum V^{**} die Identität

$$\sup\left\{|\langle Ju, g\rangle| : g \in V^*,\ \|g\|_{V^*} \leq 1\right\} = \sup\left\{|\langle g, u\rangle| : g \in V^*,\ \|g\|_{V^*} \leq 1\right\} = \|u\|_V,$$

woraus sich $\|Ju\|_{V^{**}} = \|u\|_V$ für alle $u \in V$ ergibt. Da $(V, \| \ \|_V)$ ein Banach-Raum ist, muß auch dessen isometrisches Bild $J[V]$ ein vollständiger und somit abgeschlossener linearer Teilraum von V^{**} sein. □

Prinzip der gleichgradigen Beschränktheit. Sei $(V, \| \ \|_V)$ ein separabler Banach-Raum über $\mathbb{K}$ sowie $E \subset V$. Ist die Menge $\left\{\langle f, u\rangle \in \mathbb{K} : u \in E\right\}$ für jedes $f \in V^*$ in $\mathbb{K}$ beschränkt, dann ist auch E in V beschränkt.

Beweis. Ist $\left\{\langle f, u\rangle \in \mathbb{K} : u \in E\right\}$ für jedes $f \in V^*$ in $\mathbb{K}$ beschränkt, dann ist auch

$$\left\{\langle h, f\rangle \in \mathbb{K} : h \in J[E]\right\} = \left\{\langle Ju, f\rangle \in \mathbb{K} : u \in E\right\}$$

für jedes $f \in V^*$ in $\mathbb{K}$ beschränkt. Somit liefert das Prinzip der gleichgradigen Beschränktheit für Funktionale auf V^*, daß $J[E]$ in $J[V] \subset V^{**}$ beschränkt ist. Damit muß auch das isometrische Urbild E in V beschränkt sein. □

Schwache Konvergenz. Sei $(V, \| \ \|_V)$ ein separabler Banach-Raum über $\mathbb{K}$.

1. Man sagt, eine Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ *konvergiert schwach* gegen einen Grenzwert $u \in V$, wenn $\lim_{k\to\infty}\langle f, u_k\rangle = \langle f, u\rangle$ für jedes $f \in V^*$ gilt.
2. Gilt für ein weiteres Element $v \in V$ die Beziehung $\lim_{k\to\infty}\langle f, u_k\rangle = \langle f, v\rangle$ für alle $f \in V^*$, dann ergibt sich $\langle f, u - v\rangle = 0$ für jedes $f \in V^*$ und somit $u = v$.
3. Die Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ konvergiert genau dann schwach gegen $u \in V$, wenn

$$\lim_{k\to\infty}\langle Ju_k, f\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle f, u_k\rangle = \langle f, u\rangle = \langle Ju, f\rangle \quad \text{für jedes } f \in V^* \text{ gilt,}$$

das heißt, wenn $\{Ju_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V^{**}$ punktweise auf V^* gegen $Ju \in V^{**}$ konvergiert.

4. Konvergiert die Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ schwach gegen $u \in V$, dann ist die Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt in V, und es gilt die Abschätzung $\|u\|_V \leq \liminf_{k\to\infty}\|u_k\|_V$.

Beweis. Konvergiert die Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ schwach gegen $u \in V$, so konvergiert die Folge $\{Ju_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V^{**}$ punktweise auf V^* gegen $Ju \in V^{**}$. Somit ist die Folge $\{Ju_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V^{**}$ beschränkt in V^{**}, und es gilt $\|Ju\|_{V^{**}} \leq \liminf_{k\to\infty}\|Ju_k\|_{V^{**}}$. Da $J \in \mathcal{L}(V; V^{**})$ eine Isometrie von V auf $J[V]$ ist, muß die Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ somit beschränkt in V sein und $\|u\|_V \leq \liminf_{k\to\infty}\|u_k\|_V$ gelten. □

Satz von Banach-Steinhaus. Ist $(V, \| \ \|_V)$ ein separabler Banach-Raum über $\mathbb{K}$, so konvergiert die Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ genau dann schwach gegen den Grenzwert $u \in V$, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ ist beschränkt in V.
2. Es gibt eine Menge $E \subset V^*$ mit $V^* = \operatorname{cl}\operatorname{lin} E$, so daß $\{\langle f, u_k\rangle\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ für jedes $f \in E$ in $\mathbb{K}$ gegen den Grenzwert $\langle f, u\rangle \in \mathbb{K}$ konvergiert.

Beweis. Die Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ konvergiert genau dann schwach gegen den Grenzwert $u \in V$, wenn die Folge $\{Ju_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V^{**}$ punktweise auf V^* gegen $Ju \in V^{**}$ konvergiert. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus für Funktionale auf V^* ist dies gleichbedeutend zur Gültigkeit der beiden folgenden Bedingungen:

1* Die Folge $\{Ju_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V^{**}$ ist beschränkt in V^{**}.

2* Es gibt eine Menge $E \subset V^*$ mit $V^* = \operatorname{cl}\operatorname{lin} E$, so daß $\{\langle Ju_k, f\rangle\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ für jedes $f \in E$ in $\mathbb{K}$ gegen $\langle Ju, f\rangle \in \mathbb{K}$ konvergiert.

Da die natürliche Einbettung $J \in \mathcal{L}(V; V^{**})$ eine Isometrie von V auf $J[V]$ ist, sind dazu die beiden folgenden Bedingungen äquivalent:

1. Die Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ ist beschränkt in V.
2. Es gibt eine Menge $E \subset V^*$ mit $V^* = \operatorname{cl}\operatorname{lin} E$, so daß $\{\langle f, u_k\rangle\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ für jedes $f \in E$ in $\mathbb{K}$ gegen den Grenzwert $\langle f, u\rangle \in \mathbb{K}$ konvergiert. □

Konvergenzkriterium. Sei $(V, \| \ \|_V)$ ein separabler Banach-Raum über $\mathbb{K}$. Konvergiert die Folge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V^*$ in V^* gegen den Grenzwert $f \in V^*$ und die Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ schwach gegen den Grenzwert $u \in V$, so gilt $\lim_{k\to\infty}\langle f_k, u_k\rangle = \langle f, u\rangle$.

Beweis. Unter den angegebenen Voraussetzungen gilt die Abschätzung

$$|\langle f_k, u_k\rangle - \langle f, u\rangle| \le |\langle f_k - f, u_k\rangle| + |\langle f, u_k - u\rangle| \le \|f_k - f\|_{V^*}\|u_k\|_V + |\langle f, u_k - u\rangle|$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Da die Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ nach dem Satz von Banach-Steinhaus in V beschränkt ist sowie $\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{V^*} = 0$ und $\lim_{k\to\infty} |\langle f, u_k - u\rangle| = 0$ gelten, folgt daraus $\lim_{k\to\infty}\langle f_k, u_k\rangle = \langle f, u\rangle$. □

Topologie der schwachen Konvergenz. Sei $(V, \| \ \|_V)$ ein separabler Banach-Raum über dem Körper $\mathbb{K}$.

1. Eine Teilmenge $U \subset V$ heißt *offen bezüglich der schwachen Konvergenz*, wenn es für jedes $u \in U$ Zahlen $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N}$ sowie Funktionale $g_1, \dots, g_n \subset V^*$ gibt, so daß

$$\left\{v \in V : \sup_{1\le\ell\le n} |\langle g_\ell, v - u\rangle| < \delta\right\} \subset U.$$

2. Eine Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ konvergiert genau dann schwach gegen $u \in V$, wenn es für jede bezüglich der schwachen Konvergenz offene Menge $U \subset V$ mit $u \in U$ einen Index $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $u_k \in U$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \ge k_0$ gilt.

Beweis. Seien $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ eine Folge und $u \in V$ ein Element, so daß es für jede bezüglich der schwachen Konvergenz offene Menge $U \subset V$ mit $u \in U$ einen Index $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $u_k \in U$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$ gilt. Wird $f \in V^*$ beliebig fixiert, so betrachtet man für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ die bezüglich der schwachen Konvergenz offene Menge

$$U_\ell = \left\{v \in V : |\langle f, v - u\rangle| < \tfrac{1}{\ell}\right\} \subset V \quad \text{mit } u \in U_\ell.$$

Nach Voraussetzung existiert dann für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ ein $k_\ell \in \mathbb{N}$, so daß $u_k \in U_\ell$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_\ell$ gilt, das heißt,

$$|\langle f, u_k - u\rangle| < \tfrac{1}{\ell} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, k \geq k_\ell \text{ und } \ell \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt $\limsup_{k\to\infty} |\langle f, u_k - u\rangle| \leq \frac{1}{\ell}$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ und somit die schwache Konvergenz $\lim_{k\to\infty} |\langle f, u_k - u\rangle| = 0$ für jedes $f \in V^*$.

Sei umgekehrt $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ eine Folge, die schwach gegen einen Grenzwert $u \in V$ konvergiert, das heißt, es gilt $\lim_{k\to\infty} |\langle f, u_k - u\rangle| = 0$ für alle $f \in V^*$. Sei ferner eine bezüglich der schwachen Konvergenz offene Menge

$$U = \left\{v \in V : \sup_{1\leq\ell\leq n} |\langle g_\ell, v - u\rangle| < \delta\right\} \subset V \quad \text{mit } u \in U$$

für beliebige $n \in \mathbb{N}, \delta > 0$ sowie $g_1, \ldots, g_n \in V^*$ vorgegeben. Da nach Voraussetzung $\lim_{k\to\infty} |\langle g_\ell, u_k - u\rangle| = 0$ für alle $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ gilt, existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß $u_k \in U$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$ gilt. □

3. Eine Teilmenge $K \subset V$ heißt *relativ kompakt bezüglich schwacher Konvergenz*, wenn für jede Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ eine wachsende Folge $\{k_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ existiert, so daß $\{u_{k_m}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset K$ schwach gegen einen Grenzwert $u \in V$ konvergiert.

4. Man nennt eine Teilmenge $K \subset V^*$ *kompakt bezüglich schwacher Konvergenz*, wenn für jede Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ eine wachsende Folge $\{k_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ existiert, so daß $\{u_{k_m}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset K$ schwach gegen einen Grenzwert $u \in K$ konvergiert.