Vorlesung 18

Reflexive Räume und schwache Konvergenz

Reflexive Banach-Räume. Ein Banach-Raum $(V, \| \ \|_V)$ über $\mathbb{K}$ heißt *reflexiv*, wenn die natürliche Einbettung $J \in \mathcal{L}(V; V^{**})$ surjektiv ist.

Abgeschlossene lineare Teilräume separabler reflexiver Banach-Räume. Ist der separable Banach-Raum $(V, \| \ \|_V)$ über $\mathbb{K}$ reflexiv, dann ist auch jeder abgeschlossene lineare Teilraum $(V_0, \| \ \|_V)$ von $(V, \| \ \|_V)$ reflexiv.

Beweis. 1. Sei ein abgeschlossener linearer Teilraum V_0 von $(V, \| \ \|_V)$ und ein Funktional $h_0 \in V_0^{**} = \mathcal{L}(V_0^*; \mathbb{K})$ vorgegeben. Betrachtet man für jedes $f \in V^*$ die Einschränkung $f|V_0 \in V_0^* = \mathcal{L}(V_0; \mathbb{K})$, dann gilt

$$\|f|V_0\|_{V_0^*} = \sup\left\{|\langle f, v\rangle| : v \in V_0,\ \|v\|_V \leq 1\right\} \leq \|f\|_{V^*}$$

und durch die Vorschrift

$$\langle h, f\rangle = \langle h_0, f|V_0\rangle \quad \text{für } f \in V^*$$

wird ein lineares Funktional $h : V^* \to \mathbb{K}$ definiert. Aufgrund der Abschätzung

$$|\langle h, f\rangle| = |\langle h_0, f|V_0\rangle| \leq \|h_0\|_{V_0^{**}} \|f|V_0\|_{V_0^*} \leq \|h_0\|_{V_0^{**}} \|f\|_{V^*} \quad \text{für jedes } f \in V^*$$

gilt $h \in V^{**} = \mathcal{L}(V^*; \mathbb{K})$. Aufgrund der Reflexivität des Banach-Raums $(V, \| \ \|_V)$ gibt es ein $u \in V$ mit $J_V u = h$.

2. Angenommen, es würde $u \notin V_0$ gelten. Da V_0 ein abgeschlossener linearer Teilraum V_0 von V ist, wäre der Abstand $\delta = \inf\left\{\|u - v\|_V : v \in V_0\right\} > 0$ positiv. Die Anwendung des Trennungssatzes würde ein $g \in V^*$ mit $\|g\|_{V^*} = 1$, $\langle g, u\rangle = \delta$ und $\langle g, v\rangle = 0$ für alle $v \in V_0$ liefern, was der in Schritt 1 gewonnenen Beziehung $\langle g, u\rangle = \langle J_V u, g\rangle = \langle h, g\rangle = \langle h_0, g|V_0\rangle = 0$ widerspräche. Somit gilt $u \in V_0$.

3. Sei $f_0 \in V_0^* = \mathcal{L}(V_0; \mathbb{K})$ beliebig fixiert. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es eine Erweiterung $f \in V^* = \mathcal{L}(V; \mathbb{K})$ von f_0 mit $f|V_0 = f_0$ und $\|f\|_{V^*} = \|f_0\|_{V_0^*}$. Da $u \in V_0$ wegen Schritt 2 gilt, folgt zusammen mit Schritt 1 daraus

$$\langle J_{V_0} u, f_0\rangle = \langle f_0, u\rangle = \langle f, u\rangle = \langle J_V u, f\rangle = \langle h, f\rangle = \langle h_0, f|V_0\rangle = \langle h_0, f_0\rangle,$$

also $h_0 = J_{V_0} u$ für $u \in V_0$. Somit ergibt sich die Surjektivität der natürlichen Einbettung $J_{V_0} \in \mathcal{L}(V_0; V_0^{**})$, das heißt, die Reflexivität von $(V_0, \| \ \|_V)$. $\square$

Homöomorphismen auf reflexiven Banach-Räumen. Sind $(V, \|\ \|_V)$, $(W, \|\ \|_W)$ separable Banach-Räume über demselben Körper $\mathbb{K}$ und $T \in \mathcal{L}(V; W)$ ein linearer Homöomorphismus von V auf W, so ist $(V, \|\ \|_V)$ genau dann reflexiv, wenn $(W, \|\ \|_W)$ reflexiv ist.

Beweis. Sei der Banach-Raum $(V, \|\ \|_V)$ reflexiv und $b \in W^{**}$ beliebig vorgegeben. Da für jedes Funktional $f \in V^*$ wegen $T^{-1} \in \mathcal{L}(W; V)$ stets $fT^{-1} \in W^*$ und $\|fT^{-1}\|_{W^*} \leq \|T^{-1}\| \|f\|_{V^*}$ gilt, wird durch die Vorschrift

$$\langle h, f \rangle = \langle b, fT^{-1} \rangle \quad \text{für } f \in V^*$$

ein Funktional $h \in V^{**}$ definiert.

Wird $g \in W^*$ beliebig vorgegeben, dann folgt daraus für $f = gT \in V^*$ wegen der Bijektivität der natürlichen Einbettung $J_V \in \mathcal{L}(V; V^{**})$ die Identität

$$\langle b, g \rangle = \langle h, gT \rangle = \langle gT, J_V^{-1} h \rangle = \langle g, TJ_V^{-1} h \rangle = \langle J_W T J_V^{-1} h, g \rangle \quad \text{für jedes } g \in W^*,$$

also $b = J_W T J_V^{-1} h$ für $TJ_V^{-1} h \in W$. Somit ergibt sich die Surjektivität der natürlichen Einbettung $J_W \in \mathcal{L}(W; W^{**})$, das heißt, die Reflexivität von $(W, \|\ \|_W)$. □

Beschränktheit relativ kompakter Mengen. Ist $(V, \|\ \|_V)$ ein separabler Banach-Raum über $\mathbb{K}$, dann ist jede bezüglich der schwachen Konvergenz relativ kompakte Menge $K \subset V$ in V beschränkt.

Beweis. Wäre die bezüglich der schwachen Konvergenz relativ kompakte Menge K in V unbeschränkt, so könnte man nach dem Prinzip der gleichgradigen Beschränktheit ein Funktional $f \in V^*$ finden, so daß auch $\big\{\langle f, u \rangle \in \mathbb{K} : u \in K\big\}$ unbeschränkt wäre. Somit würde eine Folge $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset K$ existieren, so daß $|\langle f, u_k \rangle| \geq k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gälte, was im Widerspruch zur Existenz einer schwach konvergenten Teilfolge von $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset K$ stünde. □

Metrisierung separabler Banach-Räume mit separablem Dualraum. Hat der separable Banach-Raum $(V, \|\ \|_V)$ über $\mathbb{K}$ einen separablen dualen Raum $(V^*, \|\ \|_{V^*})$, ist $E = \{g_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare dichte Menge in V^* und K eine in V beschränkte Teilmenge, so gelten folgende Aussagen:

1. Analog zur Metrik im Raum (s, ρ) aller Zahlenfolgen wird durch die Vorschrift

$$e(u, v) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{2^\ell} \frac{|\langle g_\ell, u - v \rangle|}{1 + |\langle g_\ell, u - v \rangle|} \quad \text{für } u, v \in V$$

eine Metrik $e : V \times V \to \mathbb{R}$ auf V definiert.

2. Eine Folge $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset K$ konvergiert genau dann schwach gegen $u \in V$, wenn $\lim_{k \to \infty} e(u_k, u) = 0$ gilt.

3. Die Teilmenge $K \subset V$ ist genau dann (relativ) kompakt bezüglich schwacher Konvergenz, wenn sie (relativ) kompakt im metrischen Raum (V, e) ist.

Beweis. Sei $T : V \to s$ die Abbildung, die jedem $u \in V$ die Folge $\{\langle g_\ell, u\rangle\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in s$ der Werte der Funktionale $E = \{g_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset V^*$ in $u \in V$ zuordnet.

1. Offensichtlich erhält man für alle u, $v \in V$ stets $e(u,v) = e(v,u) \geq 0$. Falls $e(u,v) = 0$ gilt, ergibt sich nach Definition $\langle g_\ell, u - v\rangle = 0$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$. Da $E = \{g_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ in V^* dicht ist, folgt daraus $\langle f, u - v\rangle = 0$ für jedes $f \in V^*$ und somit $u = v$ wegen der Separabilität von V.

Für alle u, v, $w \in V$ gilt $\rho(Tu, Tw) \leq \rho(Tu, Tv) + \rho(Tv, Tw)$ im metrischen Raum (s, ρ), woraus sich offenbar $e(u,w) \leq e(u,v) + e(v,w)$ ergibt.

2. Es gilt genau dann $\lim_{k\to\infty} e(u_k, u) = \lim_{k\to\infty} \rho(Tu_k, Tu) = 0$ für $u \in V$ und $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$, wenn die Konvergenzbeziehung $\lim_{k\to\infty}\langle g_\ell, u_k\rangle = \langle g_\ell, u\rangle$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ gilt. Wegen der Dichtheit von $E = \{g_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ in V^* und der Beschränktheit der Teilmenge K in V ist dies nach dem Satz von Banach-Steinhaus äquivalent zur schwachen Konvergenz von $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ gegen $u \in V$.

3. Die Menge $K \subset V$ ist genau dann relativ kompakt bezüglich schwacher Konvergenz, wenn es für jede Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ eine wachsende Folge $\{k_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ gibt, so daß $\{u_{k_m}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset K$ schwach gegen einen Grenzwert $u \in V$ konvergiert. Nach Schritt 2 ist das gleichbedeutend mit $\lim_{m\to\infty} e(u_{k_m}, u) = 0$ und somit äquivalent zur relativen Kompaktkeit von K im metrischen Raum (V, e).

4. Die Teilmenge $K \subset V$ ist genau dann kompakt bezüglich schwacher Konvergenz, wenn für jede Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ eine wachsende Folge $\{k_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ existiert, so daß $\{u_{k_m}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset K$ schwach gegen einen Grenzwert $u \in K$ konvergiert. Dies ist nach Schritt 2 äquivalent zu $\lim_{m\to\infty} e(u_{k_m}, u) = 0$ und daher gleichbedeutend mit der Kompaktkeit von K im metrischen Raum (V, e). □

Satz von Eberlein-Schmuljan. Ist $(V, \|\ \|_V)$ ein separabler reflexiver Banach-Raum über $\mathbb{K}$ mit separablem Dualraum $(V^*, \|\ \|_{V^*})$ und $E = \{g_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare dichte Menge in V^*, so gelten folgende Aussagen:

1. Jede beschränkte Teilmenge $K \subset V$ ist relativ kompakt in (V, e), das heißt, relativ kompakt bezüglich der schwachen Konvergenz.

2. Die abgeschlossene Kugel $\big\{u \in V : \|u\|_V \leq 1\big\}$ ist kompakt in (V, e), mit anderen Worten, kompakt bezüglich der schwachen Konvergenz.

Beweis. 1. Sei die Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ beliebig vorgegeben. Aufgrund der Stetigkeit der natürlichen Einbettung $J \in \mathcal{L}(V; V^{**})$ ist auch das Bild $J[K]$ in V^{**} beschränkt. Wegen der Separabilität von $(V^*, \|\ \|_{V^*})$ liefert daher der Satz von Banach-Alaoglu die relative Kompaktheit der Bildmenge $J[K]$ bezüglich der punktweisen Konvergenz auf V^*. Somit existiert eine wachsende Teilfolge $\{k_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$, so daß die Folge $\{Ju_{k_m}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset J[K]$ punktweise auf V^* gegen einen Grenzwert $h \in V^{**}$ konvergiert.

Wegen der Reflexivität von $(V, \| \ \|_V)$ ist die natürliche Einbettung $J \in \mathcal{L}(V; V^{**})$ surjektiv. Somit existiert ein Urbild $u \in V$ mit $Ju = h$, und es gilt

$$\lim_{m\to\infty} \langle f, u_{k_m}\rangle = \lim_{m\to\infty} \langle J u_{k_m}, f\rangle = \langle h, f\rangle = \langle Ju, f\rangle = \langle f, u\rangle \quad \text{für jedes } f \in V^*,$$

das heißt, die Folge $\{u_{k_m}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset K$ konvergiert schwach gegen $u \in V$, woraus $\lim_{m\to\infty} e(u_{k_m}, u) = 0$ und somit die relative Kompaktheit von K in (V, e) folgt.

2. Für die abgeschlossene Kugel $K = \big\{u \in V : \|u\|_V \leq 1\big\}$ liefert die obige Argumentation zunächst, daß man für jede Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ eine wachsende Teilfolge $\{k_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ finden kann, so daß $\{u_{k_m}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset K$ im metrischen Raum (V, e), das heißt, schwach gegen einen Grenzwert $u \in V$ konvergiert. Wegen der Beziehung $\|u\|_V \leq \liminf_{m\to\infty} \|u_{k_m}\|_V \leq 1$ folgt daraus $u \in K$. Damit ist die abgeschlossene Kugel K kompakt in (V, e). $\square$