Vorlesung 19

Meßbare und integrierbare Funktionen

Sei $(V, \| \ \|_V)$ ein separabler Banach-Raum über $\mathbb{K}$ sowie $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein *σ-endlicher, vollständiger Maßraum*:

1. Das Mengensystem $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(X)$ ist eine *σ-Algebra über X*: Es gilt $\varnothing \in \mathfrak{A}$, für alle $E \in \mathfrak{A}$ gilt $X \setminus E \in \mathfrak{A}$, und für jede Familie $\{E_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ gilt $\cup_{\ell=1}^{\infty} E_\ell \in \mathfrak{A}$.
2. Die Mengenfunktion $\mu : \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ ist ein *Maß*: Es gilt $\mu(\varnothing) = 0$, und für jede Familie $\{E_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ paarweise disjunkter Mengen gilt $\mu(\cup_{\ell=1}^{\infty} E_\ell) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mu(E_\ell)$.
3. Das Maß μ ist *σ-endlich*: Es gibt eine Zerlegung $\{E_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ von X in Mengen E_ℓ endlichen Maßes.
4. Das Maß μ ist *vollständig*: Aus $E \in \mathfrak{A}$, $\mu(E) = 0$ und $E_0 \subset E$ folgt stets $E_0 \in \mathfrak{A}$.

Einfache Funktionen. Eine Funktion $u : X \to V$ heißt *einfach*, wenn es eine Zerlegung $\{E_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ von X in Mengen E_ℓ endlichen Maßes sowie eine Familie $\{v_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \subset V$ gibt, so daß u die Darstellung $u = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_\ell} v_\ell$ besitzt, wobei $\mathbb{1}_E : X \to \mathbb{R}$ die Indikatorfunktion der meßbaren Menge $E \in \mathfrak{A}$ ist.

Meßbare Funktionen. Die Funktion $u : X \to V$ heißt *meßbar*, wenn eine Folge $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ einfacher Funktionen $u_k : X \to V$ existiert, die auf X fast überall gegen die Grenzfunktion u konvergiert.

Meßbarkeit reell- oder komplexwertiger Funktionen. Im Falle $V = \mathbb{K}$ gilt:

1. Sei $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge einfacher Funktionen $u_k : X \to \mathbb{K}$, welche auf X fast überall gegen eine Funktion $u : X \to \mathbb{K}$ konvergiert. Aufgrund der Meßbarkeit der Funktionen u_k und der Vollständigkeit des Maßraumes ist dann auch u meßbar.
2. Umgekehrt läßt sich für jede meßbare Funktion $u : X \to \mathbb{K}$ eine Folge $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ einfacher Funktionen $u_k : X \to \mathbb{K}$ finden, die auf X fast überall gegen u konvergiert.

Folgerung. Für jede meßbare Funktion $u : X \to V$ existiert eine Folge $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ einfacher Funktionen $u_k : X \to V$, so daß $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ fast überall auf X gegen u konvergiert sowie $\|u_k\|_V \leq 2\|u\|_V$ fast überall auf X für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Beweis. 1. Ist $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge einfacher Funktionen $u_k : X \to V$, welche auf X fast überall gegen die meßbare Funktion $u : X \to V$ konvergiert, dann konvergiert auch $\{\|u_k\|_V\}_{k \in \mathbb{N}}$ fast überall auf X gegen die Funktion $\|u\|_V : X \to \mathbb{R}$, die somit ebenfalls meßbar ist.

2. Sei $\{\tilde{u}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge einfacher Funktionen $\tilde{u}_k : X \to V$, welche auf X fast überall gegen die meßbare Funktion $u : X \to V$ konvergiert. Mit Hilfe der Familie $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ meßbarer Mengen $A_k = \big\{x \in X : \|\tilde{u}_k(x)\|_V \leq 2\|u(x)\|_V\big\}$ wird die Folge $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ einfacher Funktionen $u_k = \mathbb{1}_{A_k} \tilde{u}_k : X \to V$ konstruiert.

Gilt $u(x) = 0$ für ein $x \in X$, so folgt daraus $u_k(x) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Ist andererseits $x \in X$ ein Punkt, für den $\|u(x)\|_V > 0$ gilt und $\{\tilde{u}_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ in V gegen $u(x)$ konvergiert, dann existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\|\tilde{u}_k(x) - u(x)\|_V \le \|u(x)\|_V$ für alle $k \ge k_0$ gilt. Daraus ergibt sich $\|\tilde{u}_k(x)\|_V \le 2\|u(x)\|_V$ und somit $x \in A_k$ für jedes $k \ge k_0$. Wegen $u_k = \mathbb{1}_{A_k}\tilde{u}_k$ folgt daraus $\lim_{k\to\infty} \|u_k(x) - u(x)\|_V = 0$. Insgesamt konvergiert die Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ fast überall auf X gegen die Grenzfunktion $u : X \to V$. Ferner gilt $\|u_k\|_V \le 2\|u\|_V$ fast überall auf X für jedes $k \in \mathbb{N}$. □

Schwach meßbare Funktionen. 1. Man nennt eine Funktion $u : X \to V$ *schwach meßbar*, wenn die Funktion $\langle f, u\rangle : X \to \mathbb{K}$ für jedes $f \in V^*$ meßbar ist.

2. Ist $u : X \to V$ schwach meßbar, dann ist $\|u\|_V : X \to \mathbb{R}$ meßbar.

Beweis. Da $(V, \|\ \ \|_V)$ ein separabler Banach-Raum ist, gibt es eine abzählbare dichte Teilmenge $\{\psi_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ in V. Mit Hilfe des Trennungssatzes findet man für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ ein Funktional $g_\ell \in V^*$ mit $\|g_\ell\|_{V^*} = 1$ sowie $\langle g_\ell, \psi_\ell\rangle = \|\psi_\ell\|_V$.

Ist $x \in X$ beliebig vorgegeben, dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\|u(x) - \psi_\ell\|_V \le \varepsilon$. Daraus ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|u(x)\|_V &\le \|\psi_\ell\|_V + \|u(x) - \psi_\ell\|_V = \langle g_\ell, \psi_\ell\rangle + \|u(x) - \psi_\ell\|_V\\ &\le |\langle g_\ell, u(x)\rangle| + \|g_\ell\|_{V^*}\|u(x) - \psi_\ell\|_V + \|u(x) - \psi_\ell\|_V\\ &\le |\langle g_\ell, u(x)\rangle| + 2\|u(x) - \psi_\ell\|_V \le \sup_{\ell\in\mathbb{N}} |\langle g_\ell, u(x)\rangle| + 2\varepsilon\end{aligned}$$

und somit $\|u(x)\|_V \le \sup_{\ell\in\mathbb{N}} |\langle g_\ell, u(x)\rangle|$. Andererseits gilt $|\langle g_\ell, u(x)\rangle| \le \|u(x)\|_V$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$, also insgesamt $\|u(x)\|_V = \sup_{\ell\in\mathbb{N}} |\langle g_\ell, u(x)\rangle|$ für fast alle $x \in X$, woraus sich die Meßbarkeit der Funktion $\|u\|_V : X \to \mathbb{R}$ ergibt. □

Satz von Pettis. Eine Funktion $u : X \to V$ ist genau dann meßbar, wenn sie schwach meßbar ist. In diesem Falle gibt eine Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ einfacher Funktionen $u_k : X \to V$, so daß $\|u_k - u\|_V \le \frac{1}{k}$ fast überall auf X für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Beweis. 1. Ist $u : X \to V$ meßbar, so existiert eine Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ einfacher Funktionen $u_k : X \to V$, die fast überall auf X gegen $u : X \to V$ konvergiert. Somit konvergiert für jedes $f \in V^*$ die Folge $\{\langle f, u_k\rangle\}_{k\in\mathbb{N}}$ einfacher Funktionen $\langle f, u_k\rangle : X \to \mathbb{K}$ fast überall auf X gegen die Grenzfunktion $\langle f, u\rangle : X \to \mathbb{K}$. Daher ist $\langle f, u\rangle : X \to \mathbb{K}$ für jedes $f \in V^*$ meßbar und folglich $u : X \to V$ schwach meßbar.

2. Da $(V, \|\ \ \|_V)$ ein separabler Banach-Raum ist, gibt es eine abzählbare dichte Menge $\{\psi_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ in V. Außerdem folgt aus der schwachen Meßbarkeit der Funktion $u : X \to V$ die Meßbarkeit von $\|u\|_V : X \to \mathbb{R}$. Konstruiert man für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Familie $\{F_{k\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ meßbarer Mengen $F_{k\ell} = \big\{x \in X : \|u(x) - \psi_\ell\|_V < \frac{1}{k}\big\}$, dann gilt

$$u[X] \subset V = \cup_{\ell=1}^{\infty}\big\{w \in V : \|w - \psi_\ell\|_V < \tfrac{1}{k}\big\}$$

und somit $X = \cup_{\ell=1}^{\infty} F_{k\ell}$.

3. Man erhält Zerlegungen $\{E_{kn}\}_{n\in\mathbb{N}}$ von X in Mengen $E_{kn} = F_{kn} \setminus \cup_{\ell=1}^{n-1} F_{k\ell} \in \mathfrak{A}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Aufgrund der σ-Endlichkeit des Maßraumes kann man eine Zerlegung $\{A_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ von X in meßbare Mengen A_ℓ endlichen Maßes finden. Definiert man die Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ einfacher Funktionen $u_k : X \to V$ durch

$$u_k = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{1}_{E_{kn}} \psi_n = \sum_{n=1}^\infty \sum_{\ell=1}^\infty \mathbb{1}_{E_{kn}\cap A_\ell} \psi_n,$$

so gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$ und fast alle $x \in X$ die Abschätzung

$$\|u_k(x) - u(x)\|_V = \left\| \sum_{n=1}^\infty \mathbb{1}_{E_{kn}}(x)(\psi_n - u(x)) \right\|_V \le \sum_{n=1}^\infty \mathbb{1}_{E_{kn}}(x) \|\psi_n - u(x)\|_V$$

und somit $\|u_k(x) - u(x)\|_V \le \frac{1}{k}$. Daher konvergiert $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ fast überall auf X gegen die Grenzfunktion $u : X \to V$, woraus sich deren Meßbarkeit ergibt. □

Grenzwerte konvergenter Folgen meßbarer Funktionen. Ist $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge meßbarer Funktionen $u_k : X \to V$, welche fast überall auf X schwach gegen eine Grenzfunktion $u : X \to V$ konvergiert, dann ist auch u meßbar.

Beweis. Sei $f \in V^*$ beliebig fixiert. Nach Voraussetzung erhält man für fast alle $x \in X$ die Beziehung $\langle f, u(x)\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle f, u_k(x)\rangle$. Da $\{\langle f, u_k\rangle\}_{k\in\mathbb{N}}$ nach dem Satz von Pettis eine Folge meßbarer Funktionen $\langle f, u_k\rangle : X \to \mathbb{K}$ ist, muß auch die Grenzfunktion $\langle f, u\rangle : X \to \mathbb{K}$ meßbar sein. Da $f \in V^*$ anfangs beliebig fixiert wurde, ist $u : X \to V$ schwach meßbar, also meßbar nach dem Satz von Pettis. □

Integrierbare einfache Funktionen. Eine einfache Funktion $u : X \to V$ heißt *integrierbar*, wenn es eine Zerlegung $\{E_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ von X in Mengen E_ℓ endlichen Maßes sowie eine Familie $\{v_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset V$ gibt, so daß $u : X \to V$ die Darstellung $u = \sum_{\ell=1}^\infty \mathbb{1}_{E_\ell} v_\ell$ besitzt, und die Reihe $\left\{\sum_{\ell=1}^m \mu(E_\ell) v_\ell\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ absolut in V konvergiert. In diesem Falle definiert man das *Integral von* $u : X \to V$ als Grenzwert

$$\int_X u\, d\mu = \sum_{\ell=1}^\infty \mu(E_\ell) v_\ell \in V.$$

Unabhängigkeit von der Zerlegung. 1. Seien $\{E_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}, \{F_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ Zerlegungen von X in Mengen E_ℓ und F_k endlichen Maßes sowie $\{v_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}, \{w_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ zwei Familien, so daß die einfache Funktion $u : X \to V$ folgende Darstellungen besitzt:

$$u = \sum_{\ell=1}^\infty \mathbb{1}_{E_\ell} v_\ell = \sum_{\ell=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty \mathbb{1}_{E_\ell\cap F_k} v_\ell,$$

$$u = \sum_{k=1}^\infty \mathbb{1}_{F_k} w_k = \sum_{k=1}^\infty \sum_{\ell=1}^\infty \mathbb{1}_{E_\ell\cap F_k} w_k.$$

2. Die Reihe $\left\{\sum_{\ell=1}^m \mu(E_\ell) v_\ell\right\}_{m\in\mathbb{N}} \subset V$ konvergiert genau dann absolut in V, wenn die einfache reellwertige Funktion $\|u\|_V = \sum_{\ell=1}^\infty \mathbb{1}_{E_\ell} \|v_\ell\|_V : X \to \mathbb{R}$ integrierbar ist. Da $\mathbb{1}_{E_\ell\cap F_k} v_\ell = \mathbb{1}_{E_\ell\cap F_k} w_k$ für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$ gilt, ist das genau dann der Fall, wenn die einfache reellwertige Funktion $\|u\|_V = \sum_{k=1}^\infty \mathbb{1}_{F_k} \|w_k\|_V : X \to \mathbb{R}$ integrierbar ist, also die Reihe $\left\{\sum_{k=1}^n \mu(F_k) w_k\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ absolut in V konvergiert.

3. In diesem Falle folgt aus den Identitäten

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \mu(E_\ell)v_\ell = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_\ell \cap F_k)v_\ell$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k)w_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \mu(E_\ell \cap F_k)w_k$$

sowie $\mathbb{1}_{E_\ell \cap F_k} v_\ell = \mathbb{1}_{E_\ell \cap F_k} w_k$ für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{\ell=1}^{\infty} \mu(E_\ell)v_\ell - \sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k)w_k \Big\|_V &\le \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_\ell \cap F_k)\|v_\ell - w_k\|_V \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_\ell \cap F_k} \|v_\ell - w_k\|_V \, d\mu = 0, \end{aligned}$$

und damit $\sum_{\ell=1}^{\infty} \mu(E_\ell)v_\ell = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k)w_k \in V$.

Integrabilitätskriterium für einfache Funktionen. Besitzt $u : X \to V$ die Darstellung $u = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_\ell} v_\ell$ mit $\{v_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \subset V$ und einer Zerlegung $\{E_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ von X in Mengen E_ℓ endlichen Maßes, so sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Die einfache Funktion $u : X \to V$ ist integrierbar.
2. Die Reihe $\big\{\sum_{\ell=1}^{m} \mu(E_\ell)v_\ell\big\}_{m \in \mathbb{N}}$ konvergiert absolut in V.
3. Die einfache Funktion $\|u\|_V = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_\ell} \|v_\ell\|_V : X \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

In diesem Falle gilt

$$\int_X \|u\|_V \, d\mu = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mu(E_\ell)\|v_\ell\|_V \in \mathbb{R}$$

sowie die Abschätzung

$$\Big\| \int_X u \, d\mu \Big\|_V = \Big\| \sum_{\ell=1}^{\infty} \mu(E_\ell)v_\ell \Big\|_V \le \sum_{\ell=1}^{\infty} \mu(E_\ell)\|v_\ell\|_V = \int_X \|u\|_V \, d\mu.$$

Linearität des Integrals. 1. Seien $u, \tilde{u} : X \to V$ integrierbare einfache Funktionen, ferner $\{E_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}, \{F_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ zwei Zerlegungen von X in Mengen E_ℓ und F_k endlichen Maßes sowie $\{v_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}, \{\tilde{v}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V$ Familien, so daß die Funktionen $u : X \to V$ und $\tilde{u} : X \to V$ die folgenden Darstellungen besitzen

$$u = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_\ell} v_\ell \quad \text{und} \quad \tilde{u} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{F_k} \tilde{v}_k.$$

2. Dann hat die Linearkombination $\alpha u + \beta \tilde{u} : X \to V$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ die Darstellung

$$\alpha u + \beta \tilde{u} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_\ell \cap F_k}(\alpha v_\ell + \beta \tilde{v}_k).$$

Die Integrierbarkeit der einfachen Funktion $\alpha u + \beta \tilde{u} : X \to V$ ergibt sich aus

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_\ell \cap F_k)\|\alpha v_\ell + \beta \tilde{v}_k\|_V \le \sum_{\ell=1}^{\infty} \big(\mu(E_\ell)\,|\alpha|\|v_\ell\|_V + \mu(F_\ell)\,|\beta|\|\tilde{v}_\ell\|_V\big),$$

und für das Integral der Linearkombination $\alpha u + \beta \tilde{u} : X \to V$ erhält man

$$\int_X (\alpha u + \beta \tilde{u}) \, d\mu = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_\ell \cap F_k)(\alpha v_\ell + \beta \tilde{v}_k) = \alpha \int_X u \, d\mu + \beta \int_X \tilde{u} \, d\mu.$$

Integrierbare Funktionen. Eine meßbare Funktion $u : X \to V$ heißt *integrierbar*, wenn es eine Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ integrierbarer einfacher Funktionen $u_k : X \to V$ gibt, welche sowohl fast überall auf X gegen u konvergiert als auch die Grenzwertbeziehung $\lim_{k\to\infty} \int_X \|u_k - u\|_V \, d\mu = 0$ erfüllt. In diesem Falle definiert man das *Integral von $u : X \to V$ über eine Menge $E \in \mathfrak{A}$* durch den Grenzwert

$$\int_E u \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X \mathbb{1}_E u_k \, d\mu \in V.$$

Unabhängigkeit von der Approximation. 1. Sei $u : X \to V$ eine meßbare Funktion, ferner $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge integrierbarer einfacher Funktionen $u_k : X \to V$, welche fast überall auf X gegen u konvergiert und für die $\lim_{k\to\infty} \int_X \|u_k - u\|_V \, d\mu = 0$ gilt. Die Folge $\left\{\int_X \mathbb{1}_E u_k \, d\mu\right\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ ist für jede Menge $E \in \mathfrak{A}$ in V konvergent, denn das Integrabilitätskriterium für einfache Funktionen liefert für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\left\| \int_X \mathbb{1}_E u_{k+\ell} \, d\mu - \int_X \mathbb{1}_E u_k \, d\mu \right\|_V &= \left\| \int_X (\mathbb{1}_E u_{k+\ell} - \mathbb{1}_E u_k) \, d\mu \right\|_V \\ &\le \int_X \|u_{k+\ell} - u\|_V \, d\mu + \int_X \|u_k - u\|_V \, d\mu.\end{aligned}$$

2. Ist $\{\tilde u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge integrierbarer einfacher Funktionen $\tilde u_k : X \to V$, welche fast überall auf X gegen u konvergiert und $\lim_{k\to\infty} \int_X \|\tilde u_k - u\|_V \, d\mu = 0$ erfüllt, so gilt für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\left\| \int_X \mathbb{1}_E u_{k+\ell} \, d\mu - \int_X \mathbb{1}_E \tilde u_k \, d\mu \right\|_V &\le \left\| \int_X (\mathbb{1}_E u_{k+\ell} - \mathbb{1}_E \tilde u_k) \, d\mu \right\|_V \\ &\le \int_X \|u_{k+\ell} - u\|_V \, d\mu + \int_X \|\tilde u_k - u\|_V \, d\mu.\end{aligned}$$

Der Grenzübergang $\ell \to \infty$ liefert somit die Konvergenz der Folge $\left\{\int_X \mathbb{1}_E \tilde u_k \, d\mu\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ in V gegen den Grenzwert der Folge $\left\{\int_X \mathbb{1}_E u_k \, d\mu\right\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$.

Linearität des Integrals. 1. Seien $u, \tilde u : X \to V$ integrierbare Funktionen, ferner $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge integrierbarer einfacher Funktionen $u_k : X \to V$, welche fast überall auf X gegen u konvergiert und $\lim_{k\to\infty} \int_X \|u_k - u\|_V \, d\mu = 0$ erfüllt, sowie $\{\tilde u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge integrierbarer einfacher Funktionen $\tilde u_k : X \to V$, welche fast überall auf X gegen $\tilde u$ konvergiert und für die $\lim_{k\to\infty} \int_X \|\tilde u_k - \tilde u\|_V \, d\mu = 0$ gilt.

2. Dann sind die Linearkombinationen $\alpha u_k + \beta \tilde u_k : X \to V$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $k \in \mathbb{N}$ ebenfalls integrierbare einfache Funktionen, und die Folge $\{\alpha u_k + \beta \tilde u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast überall auf X gegen die meßbare Funktion $\alpha u + \beta \tilde u : X \to V$. Da

$$\|(\alpha u_k + \beta \tilde u_k) - (\alpha u + \beta \tilde u)\|_V \le |\alpha| \|u_k - u\|_V + |\beta| \|\tilde u_k - \tilde u\|_V \quad \text{fast überall auf } X$$

gilt, ergibt sich $\lim_{k\to\infty} \int_X \|(\alpha u_k + \beta \tilde u_k) - (\alpha u + \beta \tilde u)\|_V \, d\mu = 0$. Die Linearkombination $\alpha u + \beta \tilde u : X \to V$ ist integrierbar, und für das Integral über $E \in \mathfrak{A}$ folgt

$$\int_E (\alpha u + \beta \tilde u) \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X (\mathbb{1}_E \alpha u_k + \mathbb{1}_E \beta \tilde u_k) \, d\mu = \alpha \int_E u \, d\mu + \beta \int_E \tilde u \, d\mu.$$

Integrabilitätskriterium von Bochner. Eine meßbare Funktion $u : X \to V$ ist genau dann integrierbar, wenn $\|u\|_V : X \to \mathbb{R}$ integrierbar ist. In diesem Falle gilt:

1. Für jede meßbare Menge $E \in \mathfrak{A}$ gilt $\left\|\int_E u\, d\mu\right\|_V \leq \int_E \|u\|_V\, d\mu$.

2. Für jede Zerlegung $\{A_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ der meßbaren Menge $E \in \mathfrak{A}$ konvergiert die Reihe $\left\{\sum_{\ell=1}^k \int_{A_\ell} u\, d\mu\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ in V gegen den Grenzwert $\int_E u\, d\mu = \sum_{\ell=1}^\infty \int_{A_\ell} u\, d\mu \in V$.

Beweis. 1. Ist $u : X \to V$ integrierbar, so gibt es eine Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ integrierbarer einfacher Funktionen $u_k : X \to V$ mit der Eigenschaft $\lim_{k\to\infty} \int_X \|u_k - u\|_V\, d\mu = 0$. Daher existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\int_X \|u_k - u\|_V\, d\mu \leq 1$. Aufgrund der Dreiecksungleichung ist somit die Funktion $\|u_k - u\|_V + \|u_k\|_V : X \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Majorante für die Funktion $\|u\|_V : X \to \mathbb{R}$, woraus deren Integrierbarkeit folgt.

2. Sei jetzt $u : X \to V$ meßbar und $\|u\|_V : X \to \mathbb{R}$ integrierbar, ferner $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge einfacher Funktionen $u_k : X \to V$, so daß $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ fast überall auf X gegen u konvergiert sowie $\|u_k\|_V \leq 2\|u\|_V$ und somit $\|u_k - u\|_V \leq 3\|u\|_V$ fast überall auf X für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Aufgrund des Integrabilitätskriteriums für einfache Funktionen sind damit die einfachen Funktionen $u_k : X \to V$ integrierbar, und aus dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz ergibt sich

$$\lim_{k\to\infty} \int_X \|u_k - u\|_V\, d\mu = \int_X \lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_V\, d\mu = 0$$

und somit die Integrierbarkeit von $u : X \to V$.

3. Sei $u : X \to V$ eine integrierbare Funktion. Wegen des Integrabilitätskriteriums für einfache Funktionen folgt für jede Menge $E \in \mathfrak{A}$ nach Definition

$$\left\|\int_E u\, d\mu\right\|_V = \lim_{k\to\infty} \left\|\int_X \mathbb{1}_E u_k\, d\mu\right\|_V \leq \lim_{k\to\infty} \int_X \|\mathbb{1}_E u_k\|_V\, d\mu = \int_E \|u\|_V\, d\mu.$$

4. Ist $\{A_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ eine Zerlegung der meßbaren Menge $E \in \mathfrak{A}$, dann konvergiert die Folge $\left\{\sum_{\ell=1}^k \mathbb{1}_{A_\ell} u\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ der integrierbaren Partialsummen $\sum_{\ell=1}^k \mathbb{1}_{A_\ell} u : X \to V$ fast überall auf X gegen die Grenzfunktion $\mathbb{1}_E u : X \to V$. Da außerdem

$$\left\|\mathbb{1}_{\cup_{\ell=1}^k A_\ell} u - \mathbb{1}_E u\right\|_V \leq \|u\|_V \quad \text{fast überall auf } X$$

gilt, erhält man

$$\lim_{k\to\infty} \left\|\sum_{\ell=1}^k \int_{A_\ell} u\, d\mu - \int_E u\, d\mu\right\|_V \leq \int_X \lim_{k\to\infty} \left\|\mathbb{1}_{\cup_{\ell=1}^k A_\ell} u - \mathbb{1}_E u\right\|_V d\mu = 0$$

nach Anwendung des Satzes von Lebesgue über majorisierte Konvergenz. □

Satz von Bochner über lineare stetige Abbildungen. Seien $(V, \|\ \|_V)$, $(W, \|\ \|_W)$ separable Banach-Räume über demselben Körper $\mathbb{K}$ sowie $T \in \mathcal{L}(V; W)$. Ist die Funktion $u : X \to V$ integrierbar, so ist auch die Funktion $Tu : X \to W$ integrierbar, und es gilt die Identität $T \int_X u\, d\mu = \int_X Tu\, d\mu$.

Beweis. 1. Sei zunächst $u : X \to V$ eine integrierbare einfache Funktion. Dann gibt es eine Zerlegung $\{E_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ von X in Mengen endlichen Maßes und eine Familie $\{v_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset V$, so daß $u = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_\ell} v_\ell$ gilt.

Wegen $T \in \mathcal{L}(V;W)$ ist $Tu = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_\ell} T v_\ell : X \to W$ eine einfache Funktion. Da fast überall auf X die Abschätzung $\|Tu\|_W \le \|T\|\|u\|_V$ gilt, ist aufgrund des Kriteriums von Bochner $Tu : X \to W$ integrierbar. Die absolute Konvergenz der Reihen $\left\{\sum_{\ell=1}^{k} \mu(E_\ell)v_\ell\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ in V und $\left\{\sum_{\ell=1}^{k} \mu(E_\ell)T v_\ell\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ in W liefert

$$T \int_X u \, d\mu = T \sum_{\ell=1}^{\infty} \mu(E_\ell)v_\ell = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mu(E_\ell)T v_\ell = \int_X Tu \, d\mu \in W.$$

2. Sei jetzt $u : X \to V$ integrierbar. Man wählt eine Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ integrierbarer einfacher Funktionen $u_k : X \to V$, die auf X fast überall gegen $u : X \to V$ konvergiert und die Grenzwertbeziehung $\lim_{k\to\infty} \int_X \|u_k - u\|_V \, d\mu = 0$ erfüllt. Aufgrund von $T \in \mathcal{L}(V;W)$ ergibt sich $\|Tu\|_W \le \|T\|\|u\|_V$ fast überall auf X und somit die Integrierbarkeit von $Tu : X \to W$ wegen des Kriteriums von Bochner. Außerdem gilt auch $\|Tu_k - Tu\|_W \le \|T\|\|u_k - u\|_V$ fast überall auf X für alle $k \in \mathbb{N}$ und somit $\lim_{k\to\infty} \int_X \|Tu_k - Tu\|_W \, d\mu = 0$.

Nach Schritt 1 gilt $T \int_X u_k \, d\mu = \int_X Tu_k \, d\mu$ für die Folgen $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ und $\{Tu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ integrierbarer einfacher Funktionen, woraus sich für alle $k \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\left\| T \int_X u \, d\mu - \int_X Tu \, d\mu \right\|_W &\le \left\| T \int_X (u_k - u) \, d\mu \right\|_W + \left\| \int_X (Tu_k - Tu) \, d\mu \right\|_W \\ &\le \|T\| \int_X \|u_k - u\|_V \, d\mu + \int_X \|Tu_k - Tu\|_W \, d\mu\end{aligned}$$

und somit $T \int_X u \, d\mu = \int_X Tu \, d\mu$ im Grenzprozeß $k \to \infty$ ergibt. $\square$