Vorlesung 20

Räume integrierbarer Funktionen

Sei $(V, \| \ \|_V)$ ein separabler Banach-Raum über $\mathbb{K}$ sowie $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein σ-endlicher, vollständiger Maßraum. Obwohl meßbare Funktionen $u : X \to V$, die sich höchstens auf einer Nullmenge voneinander unterscheiden, genau genommen Klassen äquivalenter Funktionen bilden, werden diese Klassen dennoch wie Funktionen behandelt und äquivalente Funktionen miteinander identifiziert.

Räume integrierbarer Funktionen. 1. Für $p \in [1, \infty)$ wird die Menge $L^p(X; V)$ aller meßbaren Funktionen $u : X \to V$, so daß die Funktion $\|u\|_V^p : X \to \mathbb{R}$ integrierbar ist, mit der durch

$$\|u\|_{L^p(X;V)}^p = \int_X \|u\|_V^p \, d\mu \quad \text{für } u \in L^p(X; V)$$

definierten Norm ausgestattet.

2. Im Falle $p = \infty$ definiert man auf der Menge $L^\infty(X; V)$ aller meßbaren Funktionen $u : X \to V$, für die das *wesentliche Supremum*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} \|u(x)\|_V = \inf\big\{r \in \mathbb{R} : \|u\|_V \le r \text{ fast überall auf } X\big\}$$

endlich ist, eine Norm durch $\|u\|_{L^\infty(X;V)} = \operatorname{ess\,sup}_{x\in X} \|u(x)\|_V$ für $u \in L^\infty(X; V)$.

3. Für $p \in [1, \infty]$ und $u \in L^p(X; V)$ erhält man $\|u\|_{L^p(X;V)} \ge 0$ und genau dann $\|u\|_{L^p(X;V)} = 0$, wenn $u = 0$ fast überall auf X gilt. Außerdem ergibt sich offenbar $\|\alpha u\|_{L^p(X;V)} = |\alpha| \|u\|_{L^p(X;V)}$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und $u \in L^p(X; V)$. Um einzusehen, daß $L^p(X; V)$ ein Banach-Raum ist, werden Ungleichungen von Hölder und Minkowski sowie Sätze von Weyl und Riesz-Fischer benötigt:

Hölder-Ungleichung. Sei zusätzlich vorausgesetzt, daß $(V^*, \| \ \|_{V^*})$ separabel ist. Dann gilt für alle $f \in L^q(X; V^*)$, $u \in L^p(X; V)$ mit $p, q \in [1, \infty]$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ stets $\langle f, u\rangle \in L^1(X; \mathbb{K})$ sowie $\|\langle f, u\rangle\|_{L^1(X;\mathbb{K})} \le \|f\|_{L^q(X;V^*)} \|u\|_{L^p(X;V)}$.

Beweis. 1. Seien $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ und $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen einfacher Funktionen $u_k : X \to V$ und $f_k : X \to V^*$, welche jeweils fast überall auf X gegen u bzw. f konvergieren. Dann konvergiert die Folge $\{\langle f_k, u_k\rangle\}_{k\in\mathbb{N}}$ einfacher Funktionen $\langle f_k, u_k\rangle : X \to \mathbb{K}$ fast überall gegen die Funktion $\langle f, u\rangle : X \to \mathbb{K}$, woraus sich deren Meßbarkeit ergibt.

2. Die Behauptung folgt für $\|u\|_{L^p(X;V)} = 0$ oder $\|f\|_{L^q(X;V^*)} = 0$, da dann $\langle f, u\rangle = 0$ gilt. Für $p = 1$, $q = \infty$ gilt $|\langle f, u\rangle| \le \|f\|_{V^*} \|u\|_V \le \|f\|_{L^\infty(X;V^*)} \|u\|_V$ fast überall auf X, also $\langle f, u\rangle \in L^1(X; \mathbb{K})$. Analog dazu ist der Fall $q = 1$, $p = \infty$.

3. Seien $p \in (1, \infty)$ und $\|u\|_{L^p(X;V)} > 0$, $\|f\|_{L^q(X;V^*)} > 0$. Für $a, b \ge 0$ gilt die Young-Ungleichung $ab \le \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$, denn die Konkavität des Logarithmus liefert

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b = \frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q \le \ln\Big(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q\Big) \quad \text{für } a, b > 0.$$

Durch Anwendung der Young-Ungleichung erhält man

$$\frac{|\langle f,u\rangle|}{\|f\|_{L^q(X;V^*)}\|u\|_{L^p(X;V)}} \le \frac{\|f\|_{V^*}\|u\|_V}{\|f\|_{L^q(X;V^*)}\|u\|_{L^p(X;V)}} \le \frac{\|f\|_{V^*}^q}{q\|f\|_{L^q(X;V^*)}^q} + \frac{\|u\|_V^p}{p\|u\|_{L^p(X;V)}^p}$$

fast überall auf X. Somit folgt $\langle f,u\rangle \in L^1(X;\mathbb{K})$ wegen der Integrierbarkeit der rechten Seite. Die Integration über X ergibt

$$\frac{\int_X |\langle f,u\rangle|\,d\mu}{\|f\|_{L^q(X;V^*)}\|u\|_{L^p(X;V)}} \le \frac{\int_X \|f\|_{V^*}^q\,d\mu}{q\,\|f\|_{L^q(X;V^*)}^q} + \frac{\int_X \|u\|_V^p\,d\mu}{p\,\|u\|_{L^p(X;V)}^p} = \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1,$$

das heißt, es gilt die Ungleichung $\|\langle f,u\rangle\|_{L^1(X;\mathbb{K})} \le \|f\|_{L^q(X;V^*)}\|u\|_{L^p(X;V)}$. □

Minkowski-Ungleichung. Ist $p \in [1,\infty]$, so gilt für alle u, $v \in L^p(X;V)$ stets $u+v \in L^p(X;V)$ sowie $\|u+v\|_{L^p(X;V)} \le \|u\|_{L^p(X;V)} + \|v\|_{L^p(X;V)}$.

Beweis. 1. Im Falle $p=1$ oder $p=\infty$ ergibt sich die Aussage aus der Dreiecksungleichung $\|u+v\|_V \le \|u\|_V + \|v\|_V$ fast überall auf X.

2. Sei jetzt $p \in (1,\infty)$. Dann folgt zunächst $u+v \in L^p(X;V)$, denn es gilt

$$\|u+v\|_V^p \le (\|u\|_V + \|v\|_V)^p \le 2^{p-1}\big(\|u\|_V^p + \|v\|_V^p\big) \quad \text{fast überall auf } X.$$

Hat $q \in (1,\infty)$ die Eigenschaft $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, dann erhält man wegen $q(p-1)=p$ die Beziehung $\|u+v\|_V^{p-1} \in L^q(X;\mathbb{R})$. Mit Hilfe der Ungleichung

$$\|u+v\|_V^p \le \|u\|_V\|u+v\|_V^{p-1} + \|v\|_V\|u+v\|_V^{p-1} \quad \text{fast überall auf } X,$$

und der Hölder-Ungleichung $\|\varphi\psi\|_{L^1(X;\mathbb{R})} \le \|\varphi\|_{L^p(X;\mathbb{R})}\|\psi\|_{L^q(X;\mathbb{R})}$ für reellwertige Funktionen $\varphi \in L^p(X;\mathbb{R})$ und $\psi \in L^q(X;\mathbb{R})$ ergibt sich wegen $q(p-1)=p$

$$\begin{aligned}\|u+v\|_{L^p(X;V)}^p &\le \textstyle\int_X \|u\|_V\|u+v\|_V^{p-1}\,d\mu + \int_X \|v\|_V\|u+v\|_V^{p-1}\,d\mu\\ &\le \big(\|\|u\|_V\|_{L^p(X;\mathbb{R})} + \|\|v\|_V\|_{L^p(X;\mathbb{R})}\big)\|\|u+v\|_V^{p-1}\|_{L^q(X;\mathbb{R})}\\ &= \big(\|u\|_{L^p(X;V)} + \|v\|_{L^p(X;V)}\big)\|u+v\|_{L^p(X;V)}^{p-1}\end{aligned}$$

und damit im Falle $\|u+v\|_{L^p(X;V)} > 0$ die gewünschte Minkowski-Ungleichung, welche trivial erfüllt ist, falls $\|u+v\|_{L^p(X;V)} = 0$ gilt. □

Interpolationsungleichung. Seien p, $q \in [1,\infty]$, $p<q$ sowie $u \in L^p(X;V)$ mit $u \in L^q(X;V)$ vorgegeben. Ist $s \in [p,q]$ und wird $\theta \in [0,1]$ durch $\frac{1}{s} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$ definiert, dann liefert die Hölder-Ungleichung die Beziehung

$$\textstyle\int_X \|u\|_V^s\,d\mu = \int_X \|u\|_V^{\theta s+(1-\theta)s}\,d\mu \le \big(\int_X \|u\|_V^p\,d\mu\big)^{\theta s/p}\big(\int_X \|u\|_V^q\,d\mu\big)^{(1-\theta)s/q}.$$

Somit folgt $u \in L^s(X;V)$ und die Ungleichung $\|u\|_{L^s(X;V)} \le \|u\|_{L^p(X;V)}^\theta\|u\|_{L^q(X;V)}^{1-\theta}$.

Satz von Weyl. Sei $p \in [1,\infty]$ und $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^p(X;V)$. Dann existiert eine wachsende Folge $\{k_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$, so daß $\{u_{k_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ fast überall auf X gegen einen Grenzwert $u \in L^p(X;V)$ konvergiert sowie eine Funktion $\varphi \in L^p(X;\mathbb{R})$, so daß $\|u_{k_m}\|_V \leq \varphi$ fast überall auf X für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Beweis. 1. Im Falle $p \in [1,\infty)$ gibt es eine wachsende Folge $\{k_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ mit

$$\|u_{k_{m+1}} - u_{k_m}\|_{L^p(X;V)} \leq 4^{-m} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Für $m \in \mathbb{N}$ werden die Bezeichnungen $v_m = u_{k_m}$ sowie $v_0 = 0$ eingeführt und die meßbaren Mengen $E_m = \big\{x \in X : \|v_{m+1}(x) - v_m(x)\|_V \geq 2^{-m}\big\}$ definiert. Offenbar gilt dann für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Maßabschätzung

$$\mu(E_m) \leq 2^{mp} \int_{E_m} \|v_{m+1} - v_m\|_V^p \, d\mu \leq 2^{mp} \|v_{m+1} - v_m\|_{L^p(X;V)}^p \leq 2^{-mp}$$

und für die meßbaren Mengen $N_\ell = \cup_{m=\ell}^\infty E_m$ folglich

$$\mu(N_\ell) \leq \textstyle\sum_{m=\ell}^\infty \mu(E_m) \leq 2^{1-p\ell} \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}.$$

Man bildet die meßbare Menge $N = \cap_{\ell=1}^\infty N_\ell$ und erhält $\mu(N) \leq \mu(N_\ell)$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ und somit $\mu(N) = 0$. Daher existiert für alle $x \in X \setminus N = \cup_{\ell=1}^\infty \cap_{m=\ell}^\infty (X \setminus E_m)$ ein $\ell(x) \in \mathbb{N}$, so daß $\|v_{m+1}(x) - v_m(x)\|_V < 2^{-m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq \ell(x)$ gilt.

2. Man definiert eine Folge $\{\varphi_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ meßbarer Funktionen $\varphi_\ell : X \to \mathbb{R}$ durch $\varphi_\ell(x) = \sum_{m=1}^\ell \|v_m(x) - v_{m-1}(x)\|_V$ für $x \in X \setminus N$ und setzt $\varphi_\ell(x) = 0$ für $x \in N$. Aufgrund von Schritt 1 konvergiert die Folge $\{\varphi_\ell(x)\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ für jedes $x \in X$ gegen einen endlichen Grenzwert $\varphi(x) \geq 0$. Somit ist die Grenzfunktion $\varphi : X \to \mathbb{R}$ meßbar. Ist $r > 0$ eine Schranke mit $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\|_{L^p(X;V)} \leq r$, dann liefert Schritt 1 außerdem

$$\|\varphi_\ell\|_{L^p(X;\mathbb{R})} = \Big\|\textstyle\sum_{m=1}^\ell \|v_m - v_{m-1}\|_V\Big\|_{L^p(X;\mathbb{R})} \leq \sum_{m=1}^\infty \|v_m - v_{m-1}\|_{L^p(X;V)} \leq r + 4$$

für alle $\ell \in \mathbb{N}$, woraus $\varphi \in L^p(X;\mathbb{R})$ mit Hilfe des Satzes von Fatou folgt, denn

$$\int_X |\varphi|^p \, d\mu = \int_X \liminf_{\ell\to\infty} |\varphi_\ell|^p \, d\mu \leq \liminf_{\ell\to\infty} \int_X |\varphi_\ell|^p \, d\mu \leq (r+4)^p.$$

3. Nach Konstruktion gelten für alle $m, \ell \in \mathbb{N}$ mit $m < \ell$ und jedes $x \in X \setminus N$

$$\|v_\ell(x) - v_m(x)\|_V \leq \textstyle\sum_{n=m+1}^\ell \|v_n(x) - v_{n-1}(x)\|_V = \varphi_\ell(x) - \varphi_m(x)$$

$$\|v_\ell(x)\|_V \leq \textstyle\sum_{n=1}^\ell \|v_n(x) - v_{n-1}(x)\|_V = \varphi_\ell(x).$$

Wegen Schritt 2 ist $\{v_\ell(x)\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ für jedes $x \in X \setminus N$ eine Cauchy-Folge in V, welche folglich gegen einen Grenzwert $u(x) \in V$ mit $\|u(x)\|_V \leq \varphi(x)$ konvergiert. Setzt man $u(x) = 0$ für $x \in N$, so konvergiert $\{v_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ fast überall auf X gegen eine Grenzfunktion $u : X \to V$, die somit meßbar ist. Da $\|u\|_V \leq \varphi$ fast überall auf X gilt, liefert das Kriterium von Bochner wegen $\varphi \in L^p(X;\mathbb{R})$ schließlich $u \in L^p(X;V)$.

4. Für $p = \infty$ existiert für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ ein $k_\ell \in \mathbb{N}$, so daß $\|u_k - u_m\|_{L^\infty(X;V)} \leq \frac{1}{\ell}$ für alle $k, m \geq k_\ell$ gilt. Sei ferner $r > 0$ eine Schranke mit $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\|_{L^\infty(X;V)} \leq r$.

Dann lassen sich Nullmengen $N_{km\ell} \in \mathfrak{A}$ finden, so daß sowohl $\|u_k(x)\|_V \leq r$ als auch $\|u_k(x) - u_m(x)\|_V \leq \frac{1}{\ell}$ für alle $x \in X \setminus N_{km\ell}$ und $k, m \geq k_\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$ gilt.

Für die Nullmenge $N = \cup_{\ell=1}^{\infty} \cup_{k=k_\ell}^{\infty} \cup_{m=k_\ell}^{\infty} N_{km\ell} \in \mathfrak{A}$ gilt also $\|u_k(x)\|_V \leq r$ sowie $\|u_k(x) - u_m(x)\|_V \leq \frac{1}{\ell}$ für alle $x \in X \setminus N$ sowie $k, m \geq k_\ell$ und $\ell \in \mathbb{N}$.

Wegen der Vollständigkeit von $(V, \|\ \ \|_V)$ konvergiert daher die Folge $\{u_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ für jedes $x \in X \setminus N$ gegen ein Element $u(x) \in V$ mit $\|u(x)\|_V \leq r$. Setzt man $u(x) = 0$ für jedes $x \in N$, dann konvergiert $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ fast überall auf X gegen die Grenzfunktion $u : X \to V$, die somit meßbar ist und $\|u\|_{L^\infty(X;V)} \leq r$ erfüllt. $\square$

Satz von Riesz-Fischer. Für jedes $p \in [1, \infty]$ ist $L^p(X; V)$ ein Banach-Raum.

Beweis. 1. Sei zunächst $p \in [1, \infty)$ und $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^p(X; V)$. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\|u_k - u_\ell\|_{L^p(X;V)} \leq \varepsilon$ für alle Indizes $k, \ell \geq k_0$ gilt. Der Satz von Weyl liefert eine wachsende Folge $\{k_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ und eine Funktion $u \in L^p(X; V)$, so daß $\{u_{k_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ fast überall auf X gegen u konvergiert. Mit dem Satz von Fatou gelangt man für jedes $\ell \geq k_0$ zur Abschätzung

$$\int_X \|u_\ell - u\|_V^p \, d\mu = \int_X \liminf_{m\to\infty} \|u_{k_m} - u_\ell\|_V^p \, d\mu \leq \liminf_{m\to\infty} \int_X \|u_{k_m} - u_\ell\|_V^p \, d\mu \leq \varepsilon^p,$$

woraus schließlich $\lim_{\ell\to\infty} \|u_\ell - u\|_{L^p(X;V)} = 0$ folgt.

2. Sei $p = \infty$ und $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^\infty(X; V)$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\|u_k(x) - u_\ell(x)\|_V \leq \varepsilon$ für fast alle $x \in X$ und alle $k, \ell \geq k_0$ gilt. Nach dem Satz von Weyl gibt es eine Funktion $u \in L^\infty(X; V)$, so daß $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ fast überall auf X gegen u konvergiert. Der Grenzprozeß $k \to \infty$ liefert

$$\|u_\ell(x) - u(x)\|_V \leq \liminf_{k\to\infty} \big(\|u_\ell(x) - u_k(x)\|_V + \|u_k(x) - u(x)\|_V\big) \leq \varepsilon$$

für fast alle $x \in X$ und jedes $\ell \geq k_0$. Daraus folgt $\|u_\ell - u\|_{L^\infty(X;V)} \leq \varepsilon$ für jedes $\ell \geq k_0$, das heißt, $\{u_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $L^\infty(X; V)$ gegen $u \in L^\infty(X; V)$. $\square$

Dichtheit einfacher Funktionen. Für $p \in [1, \infty]$ liegt der lineare Teilraum der einfachen Funktionen aus $L^p(X; V)$ dicht im Raum $L^p(X; V)$.

Beweis. 1. Sei zunächst $p \in [1, \infty)$ und $u \in L^p(X; V)$. Dann existiert eine Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ einfacher Funktionen $u_k : X \to V$, so daß $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ fast überall auf X gegen u konvergiert sowie $\|u_k\|_V \leq 2\|u\|_V$ und $\|u_k - u\|_V \leq 3\|u\|_V$ fast überall auf X für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Die Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ einfacher Funktionen liegt also in $L^p(X; V)$, und der Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz liefert

$$\lim_{k\to\infty} \int_X \|u_k - u\|_V^p \, d\mu = \int_X \lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_V^p \, d\mu = 0.$$

2. Im Falle $u \in L^\infty(X; V)$ erhält man nach dem Satz von Pettis eine Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ einfacher Funktionen $u_k \in L^\infty(X; V)$, so daß $\|u_k - u\|_V \leq \frac{1}{k}$ fast überall auf X für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Daher konvergiert $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $L^\infty(X; V)$ gegen $u \in L^\infty(X; V)$. $\square$

Separabilität. 1. Ein Maßraum $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ heißt *separabel*, wenn es ein abzählbares Mengensystem $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{A}$ mit der Eigenschaft gibt, so daß für jedes $\delta > 0$ und jede meßbare Menge $E \in \mathfrak{A}$ eine Menge $F \in \mathfrak{F}$ mit $\mu(F \setminus E) + \mu(E \setminus F) \leq \delta$ existiert.

2. Ist $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein σ-endlicher, vollständiger und separabler Maßraum, dann ist der Banach-Raum $L^p(X; V)$ für jedes $p \in [1, \infty)$ separabel.

Beweis. 1. Ist $D \subset V$ eine abzählbare, in V dichte Menge, dann wird durch

$$M = \left\{\textstyle\sum_{\ell=1}^{k} \mathbb{1}_{F_\ell} \psi_\ell : F_1, \ldots, F_k \in \mathfrak{F},\ \psi_1, \ldots, \psi_k \in D,\ k \in \mathbb{N}\right\}$$

eine ebenfalls abzählbare Menge definiert.

2. Sind $E \in \mathfrak{A}$ eine Menge endlichen Maßes und $v \in V$ vorgegeben, so gilt $\mathbb{1}_E v \in L^p(X; V)$. Für ein beliebig fixiertes $\delta > 0$ gibt es nach Voraussetzung eine Menge $F \in \mathfrak{F}$ endlichen Maßes, so daß $\mu(F \setminus E) + \mu(E \setminus F) \leq \delta^p$ gilt. Man erhält somit

$$\textstyle\int_X \|\mathbb{1}_E v - \mathbb{1}_F v\|_V^p \, d\mu = \int_{E \setminus F} \|v\|_V^p \, d\mu + \int_{F \setminus E} \|v\|_V^p \, d\mu \leq \delta^p \|v\|_V^p.$$

Wählt man ein $\psi \in D$ mit $\|\psi - v\|_V \leq \delta$, so ergibt sich für die Funktion $\mathbb{1}_F \psi \in M$

$$\begin{aligned} \textstyle\int_X \|\mathbb{1}_E v - \mathbb{1}_F \psi\|_V^p \, d\mu &\leq 2^{p-1} \textstyle\int_X \|\mathbb{1}_E v - \mathbb{1}_F v\|_V^p \, d\mu + 2^{p-1} \mu(F) \|\psi - v\|_V^p \\ &\leq 2^{p-1} \delta^p \big(\|v\|_V^p + \mu(E) + \delta^p\big). \end{aligned}$$

3. Sei $u = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_\ell} v_\ell \in L^p(X; V)$ eine einfache Funktion mit $\{v_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \subset V$ und einer Zerlegung $\{E_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ von X in Mengen $E_\ell \in \mathfrak{A}$ endlichen Maßes, ferner $\delta > 0$ beliebig vorgegeben. Definiert man $u_m = \sum_{\ell=1}^{m} \mathbb{1}_{E_\ell} v_\ell \in L^p(X; V)$ für $m \in \mathbb{N}$, dann kann man ein $k \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$\textstyle\int_X \|u_k - u\|_V^p \, d\mu = \sum_{\ell=k+1}^{\infty} \mu(E_\ell) \|v_\ell\|_V^p \leq \delta^p$$

finden, da die Reihe $\left\{\sum_{\ell=1}^{m} \mu(E_\ell) \|v_\ell\|_V^p\right\}_{m \in \mathbb{N}}$ gegen $\int_X \|u\|_V^p \, d\mu$ konvergiert. Aufgrund von Schritt 2 existiert für jedes $\ell \in \{1, \ldots, k\}$ eine Menge $F_\ell \in \mathfrak{F}$ endlichen Maßes sowie ein $\psi_\ell \in D$ mit der Eigenschaft $\|\mathbb{1}_{E_\ell} v_\ell - \mathbb{1}_{F_\ell} \psi_\ell\|_{L^p(X;V)} \leq 2^{-\ell} \delta$. Für die Funktion $\sum_{\ell=1}^{k} \mathbb{1}_{F_\ell} \psi_\ell \in M$ folgt daraus die Abschätzung

$$\left\|u - \textstyle\sum_{\ell=1}^{k} \mathbb{1}_{F_\ell} \psi_\ell\right\|_{L^p(X;V)} \leq \|u_k - u\|_{L^p(X;V)} + \textstyle\sum_{\ell=1}^{k} \|\mathbb{1}_{E_\ell} v_\ell - \mathbb{1}_{F_\ell} \psi_\ell\|_{L^p(X;V)} \leq 2\delta.$$

4. Seien $u \in L^p(X; V)$ und $\delta > 0$ vorgegeben. Wegen der Dichtheit einfacher Funktionen existiert eine einfache Funktion $\tilde{u} \in L^p(X; V)$ mit $\|u - \tilde{u}\|_{L^p(X;V)} \leq \delta$. Aufgrund von Schritt 3 gibt es eine Funktion $\hat{u} \in M$, so daß $\|\tilde{u} - \hat{u}\|_{L^p(X;V)} \leq \delta$ gilt, woraus sich $\|u - \hat{u}\|_{L^p(X;V)} \leq 2\delta$ ergibt. □