Vorlesung 21

Vektorwertige Maße

Sei $(V, \|\ \|_V)$ ein separabler Banach-Raum über $\mathbb{K}$, desweiteren $\mu : \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ ein σ-endliches, vollständiges Maß auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(X)$ über X.

Vektorwertige Maße. 1. Eine Mengenfunktion $\nu : \mathfrak{A} \to V$ heißt *Maß*, wenn für jede Zerlegung $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ einer Menge $E \in \mathfrak{A}$ die Reihe $\left\{\sum_{k=1}^m \nu(E_k)\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ in V konvergiert und die Eigenschaft $\nu(E) = \sum_{k=1}^\infty \nu(E_k)$ der σ-*Additivität* erfüllt ist.

2. Für jedes Maß $\nu : \mathfrak{A} \to V$ wird durch die Vorschrift

$$|\nu|(E) = \sup\left\{\textstyle\sum_{k=1}^\infty \|\nu(E_k)\|_V : \{E_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A} \text{ ist Zerlegung von } E\right\} \quad \text{für } E \in \mathfrak{A}$$

ein Maß $|\nu| : \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ definiert, das man als *Variation von* ν bezeichnet.

Beweis. 1. Aus der Additivität des Maßes $\nu : \mathfrak{A} \to V$ folgt $\nu(X) = \nu(\varnothing) + \nu(X)$, also $\|\nu(\varnothing)\|_V = 0$ und somit auch $|\nu|(\varnothing) = 0$. Ebenso erkennt man sofort, daß für alle $E \in \mathfrak{A}$ stets $0 \le \|\nu(E)\|_V \le |\nu|(E)$ gilt.

2. Ist $E \in \mathfrak{A}$ eine meßbare Menge endlicher Variation $|\nu|(E)$, dann erhält man für jede Zerlegung $\{F_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ einer Teilmenge $F \in \mathfrak{A}$ von E durch Hinzunahme der Menge $E \setminus F \in \mathfrak{A}$ eine Zerlegung von E, woraus sich $|\nu|(F) \le |\nu|(E)$ ergibt, was erst recht gilt, wenn $|\nu|(E)$ nicht endlich ist.

3. Um einzusehen, daß die Variation $|\nu| : \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ eine σ-additive Mengenfunktion ist, sei eine Zerlegung $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ einer Menge $E \in \mathfrak{A}$ vorgegeben:

Ist die Variation $|\nu|(E)$ endlich, dann ist nach Schritt 2 auch $|\nu|(E_k) \le |\nu|(E)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ endlich. Wird $\delta > 0$ beliebig fixiert, so findet man für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung $\{A_{k\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ der Menge E_k mit

$$|\nu|(E_k) \le \textstyle\sum_{\ell=1}^\infty \|\nu(A_{k\ell})\|_V + \frac{\delta}{2^k}.$$

Da $\{A_{k\ell}\}_{k,\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ eine Zerlegung von E ist, folgt daraus

$$\textstyle\sum_{k=1}^\infty |\nu|(E_k) \le \sum_{k=1}^\infty \sum_{\ell=1}^\infty \|\nu(A_{k\ell})\|_V + \sum_{k=1}^\infty \frac{\delta}{2^k} \le |\nu|(E) + \delta.$$

Wegen der willkürlichen Wahl von $\delta > 0$ erhält man $\sum_{k=1}^\infty |\nu|(E_k) \le |\nu|(E)$, was erst recht gilt, wenn $|\nu|(E)$ nicht endlich ist.

Sei umgekehrt die Reihe $\left\{\sum_{k=1}^m |\nu|(E_k)\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ konvergent und $\{A_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ eine weitere Zerlegung von E. Dann ist $\{E_k \cap A_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung von E_k, woraus sich nach Definition $\sum_{\ell=1}^\infty \|\nu(E_k \cap A_\ell)\|_V \le |\nu|(E_k)$ ergibt und somit wegen der Konvergenz der Reihe $\left\{\sum_{k=1}^m |\nu|(E_k)\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ auch

$$\textstyle\sum_{\ell=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty \|\nu(E_k \cap A_\ell)\|_V = \sum_{k=1}^\infty \sum_{\ell=1}^\infty \|\nu(E_k \cap A_\ell)\|_V \le \sum_{k=1}^\infty |\nu|(E_k).$$

Da $\{E_k \cap A_\ell\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ eine Zerlegung von A_ℓ ist, gilt $\nu(A_\ell) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k \cap A_\ell)$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$. Zusammen mit der letzten Abschätzung folgt daraus

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \|\nu(A_\ell)\|_V \le \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \|\nu(E_k \cap A_\ell)\|_V \le \sum_{k=1}^{\infty} |\nu|(E_k)$$

und somit nach Definition auch $|\nu|(E) \le \sum_{k=1}^{\infty} |\nu|(E_k)$, was auch dann richtig ist, wenn die Reihe nicht konvergiert.

Damit ist $|\nu|(E)$ genau dann endlich, wenn die Reihe $\left\{\sum_{k=1}^{m} |\nu|(E_k)\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ konvergiert. In diesem Falle gilt $|\nu|(E) = \sum_{k=1}^{\infty} |\nu|(E_k)$. Dies gilt auch dann, wenn $|\nu|(E)$ nicht endlich ist und die Reihe $\left\{\sum_{k=1}^{m} |\nu|(E_k)\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert. $\square$

Maße von beschränkter Variation. Sei $\nu : \mathfrak{A} \to V$ ein Maß.

1. Man nennt ν ein *Maß von beschränkter Variation*, wenn die *Totalvariation* $|\nu|(X)$ *von* ν endlich ist.
2. Das Maß ν heißt *absolut stetig bezüglich* μ, falls für jede Menge $E \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(E) = 0$ stets $\nu(E) = 0$ gilt.
3. Die Menge aller Maße $\nu : \mathfrak{A} \to V$ von beschränkter Variation, welche absolut stetig bezüglich μ sind, bildet einen linearen Raum $M(\mathfrak{A}; V)$.
4. Für jedes Maß $\nu \in M(\mathfrak{A}; V)$ gilt $|\nu| \in M(\mathfrak{A}; \mathbb{R})$.

Beweis. Ist $\nu : \mathfrak{A} \to V$ ein Maß von beschränkter Variation, so muß die Variation $|\nu| : \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ ein *endliches* Maß sein, das heißt, $|\nu|(E) = \sum_{k=1}^{\infty} |\nu|(E_k)$ ist für jede Zerlegung $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ einer beliebigen Menge $E \in \mathfrak{A}$ endlich. Ist $\nu : \mathfrak{A} \to V$ außerdem absolut stetig bezüglich μ, so gilt im Falle $\mu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) = 0$ stets $\mu(E_k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und damit auch $\sum_{k=1}^{\infty} \|\nu(E_k)\|_V = 0$, also $|\nu|(E) = 0$. $\square$

Maße mit integrierbarer Dichte. Für jede Funktion $u \in L^1(X; V)$ wird durch $\nu(E) = \int_E u \, d\mu$ für $E \in \mathfrak{A}$ ein Maß $\nu \in M(\mathfrak{A}; V)$ definiert, wobei für die Variation $|\nu|(E) = \int_E \|u\|_V \, d\mu$ für jedes $E \in \mathfrak{A}$ gilt.

Beweis. 1. Aufgrund des Integrabilitätskriteriums von Bochner und $u \in L^1(X; V)$ ist $\nu : \mathfrak{A} \to V$ ein Maß, denn für jede Zerlegung $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ von $E \in \mathfrak{A}$ gilt

$$\nu(E) = \int_E u \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} u \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k)$$

sowie desweiteren

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\nu(E_k)\|_V = \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \int_{E_k} u \, d\mu \right\|_V \le \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} \|u\|_V \, d\mu = \int_E \|u\|_V \, d\mu.$$

Daraus folgt $\|\nu(E)\|_V \le |\nu|(E) \le \int_E \|u\|_V \, d\mu$ für alle $E \in \mathfrak{A}$, das heißt, $\nu : \mathfrak{A} \to V$ ist ein Maß von beschränkter Variation, welches absolut stetig bezüglich μ ist.

2. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset L^1(X; V)$ eine Folge einfacher Funktionen, die in $L^1(X; V)$ gegen u konvergiert. Man wählt $m_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \ge m_0$ die Abschätzung $\int_X \|u_m - u\|_V \, d\mu \le \varepsilon$ gilt.

3. Für ein beliebig fixiertes $m \in \mathbb{N}, m \geq m_0$ kann man eine Zerlegung $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ von $E \in \mathfrak{A}$ in Mengen E_k endlichen Maßes sowie eine Familie $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ finden, so daß die Darstellung $u_m|E = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_k} v_k$ gilt. Da $\nu \in M(\mathfrak{A}; V)$ wegen Schritt 1 gilt, gibt es außerdem eine Zerlegung $\{A_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ von E mit der Eigenschaft

$$|\nu|(E) \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \|\nu(A_\ell)\|_V + \varepsilon \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k\cap A_\ell} u \, d\mu \right\|_V + \varepsilon.$$

Da auch $\{E_k \cap A_\ell\}_{k,\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ eine Zerlegung von E ist, ergibt sich daraus

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \int_{E_k\cap A_\ell} u \, d\mu \right\|_V \leq |\nu|(E) \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \int_{E_k\cap A_\ell} u \, d\mu \right\|_V + \varepsilon.$$

4. Die Darstellung $u_m|E = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_k\cap A_\ell} v_k$ liefert die Identität

$$\int_E \|u_m\|_V \, d\mu = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k \cap A_\ell)\|v_k\|_V = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \int_{E_k\cap A_\ell} u_m \, d\mu \right\|_V$$

und somit wegen der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \left| |\nu|(E) - \int_E \|u_m\|_V \, d\mu \right| &\leq \left| |\nu|(E) - \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \int_{E_k\cap A_\ell} u \, d\mu \right\|_V \right| \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left\| \int_{E_k\cap A_\ell} u \, d\mu \right\|_V - \left\| \int_{E_k\cap A_\ell} u_m \, d\mu \right\|_V \right|. \end{aligned}$$

Einserseits gilt für den ersten Summanden wegen Schritt 3 die Abschätzung

$$\left| |\nu|(E) - \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \int_{E_k\cap A_\ell} u \, d\mu \right\|_V \right| \leq \varepsilon.$$

Andererseits ergibt sich für den zweiten Summanden wegen Schritt 2

$$\begin{aligned} &\sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left\| \int_{E_k\cap A_\ell} u \, d\mu \right\|_V - \left\| \int_{E_k\cap A_\ell} u_m \, d\mu \right\|_V \right| \\ &\qquad \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k\cap A_\ell} \|u_m - u\|_V \, d\mu = \int_E \|u_m - u\|_V \, d\mu \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

das heißt, insgesamt folgt $\left| |\nu|(E) - \int_E \|u_m\|_V \, d\mu \right| \leq 2\varepsilon$ für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq m_0$ und somit $|\nu|(E) = \lim_{m\to\infty} \int_E \|u_m\|_V \, d\mu = \int_E \|u\|_V \, d\mu$ für alle $E \in \mathfrak{A}$. □

Folgerung. Gilt für $u, \tilde{u} \in L^1(X; V)$ die Identität $\int_E u \, d\mu = \int_E \tilde{u} \, d\mu$ für alle $E \in \mathfrak{A}$, dann stimmen u und $\tilde{u}$ fast überall auf X überein.

Beweis. Definiert man das Maß $\nu \in M(\mathfrak{A}; V)$ durch $\nu(E) = \int_E (u - \tilde{u}) \, d\mu$ für $E \in \mathfrak{A}$, dann gilt $\|\nu(E)\|_V = |\nu|(E) = 0$ und somit auch $\int_E \|u - \tilde{u}\|_V \, d\mu = 0$ für alle $E \in \mathfrak{A}$. Daraus folgt $\|u - \tilde{u}\|_V = 0$ fast überall auf X. □

Satz von Dunford-Pettis über die Darstellung von Maßen. Besitzt der separable Banach-Raum $(V, \| \ \|_V)$ über $\mathbb{K}$ einen separablen Dualraum $(V^*, \| \ \|_{V^*})$, dann gibt es zu jedem Maß $\nu \in M(\mathfrak{A}; V^*)$ eine Funktion $g \in L^1(X; V^*)$, so daß für alle $E \in \mathfrak{A}$ die Darstellung $\nu(E) = \int_E g \, d\mu$ gilt.

Beweis. 1. Zuerst wird der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ betrachtet: Im Hinblick auf die Separabilität von $(V, \|\ \|_V)$ wählt man eine Folge $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ linear unabhängiger Vektoren mit $V = \operatorname{cl}\operatorname{lin}\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ und betrachtet die abzählbare dichte Teilmenge

$$D = \left\{\sum_{k=1}^m z_k v_k \in V : z \in \mathbb{Q}^m,\ m \in \mathbb{N}\right\}.$$

Ist $\nu \in M(\mathfrak{A}; V^*)$ ein vorgegebenes Maß, so wird für jedes $k \in \mathbb{N}$ durch

$$\nu_k(E) = \langle \nu(E), v_k\rangle \quad \text{für } E \in \mathfrak{A}$$

ein Maß $\nu_k \in M(\mathfrak{A}; \mathbb{R})$ definiert. Nach dem klassischen Satz von Radon-Nikodým für reellwertige Maße existiert für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Funktion $d_k \in L^1(X; \mathbb{R})$, so daß $\nu_k(E) = \int_E d_k\, d\mu$ für alle $E \in \mathfrak{A}$ gilt, das heißt, für alle $z \in \mathbb{Q}^m$ und $m \in \mathbb{N}$ ebenso

$$\left\langle \nu(E), \sum_{k=1}^m z_k v_k\right\rangle = \sum_{k=1}^m z_k \nu_k(E) = \int_E \sum_{k=1}^m z_k d_k\, d\mu \quad \text{für alle } E \in \mathfrak{A}.$$

Da auch die Variation $|\nu|$ in $M(\mathfrak{A}; \mathbb{R})$ liegt, liefert der klassische Satz von Radon-Nikodým für reellwertige Maße außerdem eine Funktion $h \in L^1(X; \mathbb{R})$, so daß $|\nu|(E) = \int_E h\, d\mu$ für alle $E \in \mathfrak{A}$ gilt. Man wählt eine Nullmenge $N_0 \in \mathfrak{A}$, so daß $h \in L^1(X; \mathbb{R})$ auf $X \setminus N_0$ endliche Werte annimmt.

2. Aus diesen beiden Darstellungen folgt für alle $z \in \mathbb{Q}^m$, $m \in \mathbb{N}$ und $E \in \mathfrak{A}$ wegen $0 \le \|\nu(E)\|_{V^*} \le |\nu|(E)$ stets

$$\begin{aligned} &\int_E \left(\sum_{k=1}^m z_k d_k - \left\|\sum_{k=1}^m z_k v_k\right\|_V h\right) d\mu \\ &\qquad\qquad \le \left\langle \nu(E), \sum_{k=1}^m z_k v_k\right\rangle - \|\nu(E)\|_{V^*} \left\|\sum_{k=1}^m z_k v_k\right\|_V \le 0. \end{aligned}$$

Somit existiert für jedes $u = \sum_{k=1}^m z_k v_k \in D$ sowie $-u = -\sum_{k=1}^m z_k v_k \in D$ eine gemeinsame Nullmenge $N(u) \in \mathfrak{A}$ mit $N_0 \subset N(u)$, so daß

$$\left|\sum_{k=1}^m z_k d_k(x)\right| \le \left\|\sum_{k=1}^m z_k v_k\right\|_V h(x) \quad \text{für alle } x \in X \setminus N(u) \text{ gilt.}$$

3. Da $D \subset V$ eine abzählbare Menge ist, muß auch $N = \cup_{u\in D} N(u) \in \mathfrak{A}$ eine Nullmenge sein, das heißt, für alle $u = \sum_{k=1}^m z_k v_k \in D$ mit $z \in \mathbb{Q}^m$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left|\sum_{k=1}^m z_k d_k(x)\right| \le \left\|\sum_{k=1}^m z_k v_k\right\|_V h(x) \quad \text{für alle } x \in X \setminus N.$$

Wegen der Dichtheit von $\mathbb{Q}^m$ in $\mathbb{R}^m$ ergibt sich demzufolge auch für jedes Element $u = \sum_{k=1}^m z_k v_k \in V_0$ mit $z \in \mathbb{R}^m$ und $m \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\left|\sum_{k=1}^m z_k d_k(x)\right| \le \left\|\sum_{k=1}^m z_k v_k\right\|_V h(x) \quad \text{für alle } x \in X \setminus N,$$

wobei der lineare Teilraum $V_0 = \operatorname{lin}\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ dicht in V ist. Definiert man für jedes $x \in X \setminus N$ das lineare stetige Funktional $g_0(x) \in \mathcal{L}(V_0; \mathbb{R})$ durch

$$\langle g_0(x), u\rangle = \sum_{k=1}^m z_k d_k(x) \quad \text{für } u = \sum_{k=1}^m z_k v_k \in V_0 \text{ mit } z \in \mathbb{R}^m \text{ und } m \in \mathbb{N},$$

dann ergibt sich $\|g_0(x)\|_{V_0^*} \leq h(x)$. Man erweitert $g_0(x) \in \mathcal{L}(V_0;\mathbb{R})$ durch Abschließung zu einem Funktional $g(x) \in \mathcal{L}(V;\mathbb{R})$ mit $\|g(x)\|_{V^*} = \|g_0(x)\|_{V_0^*} \leq h(x)$ für jedes $x \in X \setminus N$, setzt $g(x) = 0$ für $x \in N$ und erhält eine Funktion $g : X \to V^*$.

4. Sei $u \in V$ vorgegeben und $\{u_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \subset D$ eine Folge mit $\lim_{\ell\to\infty} \|u_\ell - u\|_V = 0$ und $u_\ell = \sum_{k=1}^{m_\ell} z_{\ell k} v_k$ sowie $z_\ell \in \mathbb{Q}^{m_\ell}$ und $m_\ell \in \mathbb{N}$. Wegen $g(x) \in V^*$ gilt

$$\langle g(x), u\rangle = \lim_{\ell\to\infty} \langle g_0(x), u_\ell\rangle = \lim_{\ell\to\infty} \textstyle\sum_{k=1}^{m_\ell} z_{\ell k} d_k(x) \quad \text{für jedes } x \in X \setminus N,$$

woraus sich die Meßbarkeit der Funktion $\langle g, u\rangle : X \to \mathbb{R}$ ergibt. Nach Schritt 3 gilt für alle $x \in X \setminus N$ die Abschätzung $\|g(x)\|_{V^*} \leq h(x)$ und somit

$$|\langle g_0(x), u_\ell\rangle| \leq \|g(x)\|_{V^*} \|u_\ell\|_V \leq h(x)\|u_\ell\|_V \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}.$$

Wegen $h \in L^1(X;\mathbb{R})$ und den Konvergenzbeziehungen $\lim_{\ell\to\infty} \|u_\ell - u\|_V = 0$ sowie $\lim_{\ell\to\infty}\langle g_0(x), u_\ell\rangle = \langle g(x), u\rangle$ für $x \in X \setminus N$ liefert der Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz für jedes $E \in \mathfrak{A}$ die Identität

$$\begin{aligned}\langle \nu(E), u\rangle &= \lim_{\ell\to\infty} \big\langle \nu(E), \textstyle\sum_{k=1}^{m_\ell} z_{\ell k} v_k\big\rangle = \lim_{\ell\to\infty} \int_E \textstyle\sum_{k=1}^{m_\ell} z_{\ell k} d_k \, d\mu \\ &= \lim_{\ell\to\infty} \int_E \langle g_0(x), u_\ell\rangle \, d\mu = \int_E \lim_{\ell\to\infty} \langle g_0(x), u_\ell\rangle \, d\mu = \int_E \langle g, u\rangle \, d\mu.\end{aligned}$$

5. Wegen der Separabilität von $(V^*, \|\ \|_{V^*})$ folgt aus der Meßbarkeit der Funktion $\langle g, u\rangle : X \to \mathbb{R}$ für alle $u \in V$ mit dem Satz von Pettis und seinen Folgerungen die Meßbarkeit der Funktion $g : X \to V^*$. Da nach Schritt 3 für alle $x \in X$ auch $\|g(x)\|_{V^*} \leq h(x)$ gilt, ergibt sich $g \in L^1(X;V^*)$ aus $h \in L^1(X;\mathbb{R})$ aufgrund des Integrabilitätskriteriums von Bochner. Für jedes $u \in V$ liefert der Satz von Bochner über lineare stetige Abbildungen wegen $Ju \in \mathcal{L}(V^*;\mathbb{R})$ stets

$$\big\langle \textstyle\int_E g \, d\mu, u\big\rangle = \big\langle Ju, \textstyle\int_E g \, d\mu\big\rangle = \textstyle\int_E \langle Ju, g\rangle \, d\mu = \textstyle\int_E \langle g, u\rangle \, d\mu \quad \text{für jedes } E \in \mathfrak{A},$$

woraus sich wegen Schritt 4 die Identität

$$\langle \nu(E), u\rangle = \big\langle \textstyle\int_E g \, d\mu, u\big\rangle \quad \text{für jedes } u \in V$$

und somit $\nu(E) = \int_E g \, d\mu$ für alle $E \in \mathfrak{A}$ ergibt.

6. Abschließend wird der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ untersucht: Da V ein separabler Banach-Raum über $\mathbb{C}$ ist, muß $(V, \mathbb{R})$ ein separabler Banach-Raum über $\mathbb{R}$ sein, wenn man für die Elemente aus V nur die skalare Multiplikation mit reellen Zahlen zuläßt.

Der *Realteil* $f_{\mathbb{R}} : (V,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ von $f \in V^*$ wird durch $\langle f_{\mathbb{R}}, u\rangle = \mathrm{Re}\langle f, u\rangle$ für $u \in V$ definiert. Man erhält ein reell-lineares Funktional $f_{\mathbb{R}} \in (V,\mathbb{R})^*$, denn für alle $u \in V$ gilt $|\langle f_{\mathbb{R}}, u\rangle| \leq \|f\|_{V^*}\|u\|_V$ und somit $\|f_{\mathbb{R}}\|_{(V,\mathbb{R})^*} \leq \|f\|_{V^*}$. Ferner ergibt sich aus der Darstellung $\langle f, u\rangle = \mathrm{Re}\langle f, u\rangle + i\ \mathrm{Im}\langle f, u\rangle$ für $u \in V$

$$\mathrm{Re}\langle f, iu\rangle + i\ \mathrm{Im}\langle f, iu\rangle = \langle f, iu\rangle = i\langle f, u\rangle = i\ \mathrm{Re}\langle f, u\rangle - \mathrm{Im}\langle f, u\rangle,$$

also $\mathrm{Im}\langle f, u\rangle = -\mathrm{Re}\langle f, iu\rangle$ und somit $\langle f, u\rangle = \langle f_{\mathbb{R}}, u\rangle - i\langle f_{\mathbb{R}}, iu\rangle$ für alle $u \in V$.

Ist umgekehrt $f_{\mathbb{R}} \in (V,\mathbb{R})^*$ ein reell-lineares Funktional, so wird durch

$$\langle f,u\rangle = \langle f_{\mathbb{R}},u\rangle - i\langle f_{\mathbb{R}},iu\rangle \quad \text{für } u \in V$$

ein komplex-lineares Funktional $f \in V^*$ definiert: Für alle u, $v \in V$ gilt nämlich

$$\begin{aligned}\langle f,u+v\rangle &= \langle f_{\mathbb{R}},u+v\rangle - i\langle f_{\mathbb{R}},i(u+v)\rangle \\ &= \langle f_{\mathbb{R}},u\rangle - i\langle f_{\mathbb{R}},iu\rangle + \langle f_{\mathbb{R}},v\rangle - i\langle f_{\mathbb{R}},iv\rangle = \langle f,u\rangle + \langle f,v\rangle.\end{aligned}$$

Außerdem ergibt sich für alle $u \in V$ sowie a, $b \in \mathbb{R}$ stets

$$\begin{aligned}\langle f,(a+bi)u\rangle &= \langle f_{\mathbb{R}},(a+bi)u\rangle - i\langle f_{\mathbb{R}},(ai-b)u\rangle \\ &= a\big(\langle f_{\mathbb{R}},u\rangle - i\langle f_{\mathbb{R}},iu\rangle\big) + bi\big(\langle f_{\mathbb{R}},u\rangle - i\langle f_{\mathbb{R}},iu\rangle\big) = a\langle f,u\rangle + bi\langle f,u\rangle.\end{aligned}$$

Werden $u \in V$ beliebig vorgegeben und $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$ sowie $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ derart gewählt, daß $\langle f,u\rangle = r\alpha$ gilt, so erhält man

$$|\langle f,u\rangle| = r\alpha\overline{\alpha} = \overline{\alpha}\langle f,u\rangle = \mathrm{Re}\langle f,\overline{\alpha}u\rangle = \langle f_{\mathbb{R}},\overline{\alpha}u\rangle \leq \|f_{\mathbb{R}}\|_{(V,\mathbb{R})^*}\|u\|_V$$

und somit $f \in V^*$ sowie $\|f\|_{V^*} \leq \|f_{\mathbb{R}}\|_{(V;\mathbb{R})^*}$ als Normabschätzung.

Somit folgt aus der Separabilität von V^* stets die Separabilität von $(V,\mathbb{R})^*$.

7. Wird ein Maß $\nu \in M(\mathfrak{A};V^*)$ vorgegeben, so definiert man die Mengenfunktion $\nu_{\mathbb{R}} : \mathfrak{A} \to (V,\mathbb{R})^*$ durch

$$\langle \nu_{\mathbb{R}}(E),u\rangle = \mathrm{Re}\langle \nu(E),u\rangle \quad \text{für } E \in \mathfrak{A},\, u \in V.$$

Um einzusehen, daß $\nu_{\mathbb{R}} \in M(\mathfrak{A};(V,\mathbb{R})^*)$ gilt, sei $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ eine Zerlegung einer Menge $E \in \mathfrak{A}$. Wegen $\nu \in M(\mathfrak{A};V^*)$ konvergiert die Reihe $\left\{\sum_{k=1}^m \nu(E_k)\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ in V^* gegen den Grenzwert $\nu(E) = \sum_{k=1}^\infty \nu(E_k) \in V^*$. Da nach Schritt 6 stets

$$\left\|\nu_{\mathbb{R}}(E) - \textstyle\sum_{k=1}^m \nu_{\mathbb{R}}(E_k)\right\|_{(V,\mathbb{R})^*} \leq \left\|\nu(E) - \textstyle\sum_{k=1}^m \nu(E_k)\right\|_{V^*} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}$$

gilt, konvergiert die Reihe $\left\{\sum_{k=1}^m \nu_{\mathbb{R}}(E_k)\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ in $(V,\mathbb{R})^*$ gegen den entsprechenden Grenzwert $\nu_{\mathbb{R}}(E) = \sum_{k=1}^\infty \nu_{\mathbb{R}}(E_k) \in (V,\mathbb{R})^*$. Somit ist $\nu_{\mathbb{R}} : \mathfrak{A} \to (V,\mathbb{R})^*$ ein Maß.

Da wegen Schritt 6 auch $\|\nu_{\mathbb{R}}(E_k)\|_{(V;\mathbb{R})^*} \leq \|\nu(E_k)\|_{V^*}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, folgt mit $\nu \in M(\mathfrak{A};V^*)$ die Endlichkeit von

$$\textstyle\sum_{k=1}^m \|\nu_{\mathbb{R}}(E_k)\|_{(V,\mathbb{R})^*} \leq \sum_{k=1}^m \|\nu(E_k)\|_{V^*} \leq |\nu|(E) \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}$$

und somit $|\nu_{\mathbb{R}}|(E) \leq |\nu|(E)$ für alle $E \in \mathfrak{A}$. Damit ist $\nu_{\mathbb{R}} : \mathfrak{A} \to (V,\mathbb{R})^*$ ein Maß von beschränkter Variation. Wegen $\nu \in M(\mathfrak{A};V^*)$ folgt außerdem aus $E \in \mathfrak{A}$ und $\mu(E) = 0$ stets $\|\nu_{\mathbb{R}}(E)\|_{(V,\mathbb{R})^*} \leq \|\nu(E)\|_{V^*} = 0$. Somit ist das Maß $\nu_{\mathbb{R}} : \mathfrak{A} \to (V,\mathbb{R})^*$ auch absolut stetig bezüglich μ.

Wegen $\nu_{\mathbb{R}} \in M(\mathfrak{A};(V,\mathbb{R})^*)$ liefert das Ergebnis aus Schritt 5 eine integrierbare Funktion $g_{\mathbb{R}} \in L^1(X;(V,\mathbb{R})^*)$, so daß $\nu_{\mathbb{R}}(E) = \int_E g_{\mathbb{R}}\,d\mu$ für alle $E \in \mathfrak{A}$ gilt.

8. Definiert man die Funktion $g : X \to V^*$ gemäß Schritt 6 durch

$$\langle g, u \rangle = \langle g_{\mathbb{R}}, u \rangle - i \langle g_{\mathbb{R}}, iu \rangle \quad \text{für } u \in V,$$

dann folgt aus der Meßbarkeit von $\langle g_{\mathbb{R}}, u \rangle : X \to \mathbb{R}$ für jedes $u \in V$ die Meßbarkeit von $\langle g, u \rangle : X \to \mathbb{C}$ für jedes $u \in V$. Wegen der Separabilität von $(V^*, \| \ \|_{V^*})$ ergibt sich aus dem Satz von Pettis und seinen Folgerungen, daß $g : X \to V^*$ meßbar ist. Da nach Schritt 6 für fast alle $x \in X$ auch $\|g(x)\|_{V^*} \leq \|g_{\mathbb{R}}(x)\|_{(V,\mathbb{R})^*}$ sowie $g_{\mathbb{R}} \in L^1(X; (V, \mathbb{R})^*)$ gilt, erhält man $g \in L^1(X; V^*)$ gemäß

$$\int_E \|g(x)\|_{V^*} \, d\mu \leq \int_E \|g_{\mathbb{R}}(x)\|_{(V,\mathbb{R})^*} \, d\mu \quad \text{für jedes } E \in \mathfrak{A}$$

nach Anwendung des Integrabilitätskriteriums von Bochner. Ferner erhält man für alle $E \in \mathfrak{A}$, $u \in V$ wegen des Satzes von Bochner über lineare stetige Abbildungen im Hinblick auf Schritt 6 die Darstellung

$$\begin{aligned} \langle \nu(E), u \rangle &= \langle \nu_{\mathbb{R}}(E), u \rangle - i \langle \nu_{\mathbb{R}}(E), iu \rangle = \left\langle \int_E g_{\mathbb{R}} \, d\mu, u \right\rangle - i \left\langle \int_E g_{\mathbb{R}} \, d\mu, iu \right\rangle \\ &= \int_E \langle g_{\mathbb{R}}, u \rangle \, d\mu - i \int_E \langle g_{\mathbb{R}}, iu \rangle \, d\mu = \int_E \langle g, u \rangle \, d\mu = \left\langle \int_E g \, d\mu, u \right\rangle \end{aligned}$$

und somit $\nu(E) = \int_E g \, d\mu$ für jedes $E \in \mathfrak{A}$. $\square$