Vorlesung 22

Duale Räume integrierbarer Funktionen

Sei $(V, \|\ \|_V)$ ein separabler Banach-Raum über $\mathbb{K}$, dessen dualer Raum $(V^*, \|\ \|_{V^*})$ ebenfalls separabel ist, ferner $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein σ-endlicher, vollständiger Maßraum.

Isometrische Abbildung in den Dualraum. Seien $p \in [1, \infty)$, $q \in (1, \infty]$ mit der Eigenschaft $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ vorgegeben. Dann wird durch die Vorschrift

$$\langle Tf, u\rangle = \int_X \langle f, u\rangle \, d\mu \quad \text{für } f \in L^q(X; V^*), u \in L^p(X; V),$$

eine isometrische Abbildung $T \in \mathcal{L}\big(L^q(X; V^*); [L^p(X; V)]^*\big)$ definiert.

Beweis. 1. Aufgrund der Hölder-Ungleichung wird durch die obige Vorschrift für jedes $f \in L^q(X; V^*)$ ein lineares stetiges Funktional Tf auf $L^p(X; V)$ definiert, wobei $\|Tf\|_{[L^p(X;V)]^*} \leq \|f\|_{L^q(X;V^*)}$ gilt. Damit ist $T : L^q(X; V^*) \to [L^p(X; V)]^*$ eine lineare stetige Abbildung.

2. Um zu zeigen, daß T eine isometrische Abbildung ist, sei zunächst eine von Null verschiedene, einfache Funktion $f \in L^q(X; V^*)$ vorgegeben, ferner $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ eine Zerlegung von X in Mengen endlichen Maßes und $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V^*$ eine Familie, so daß die Darstellung $f = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_k} f_k$ gilt. Sei $\varepsilon \in (0, 1)$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es eine Folge $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ mit $\|v_k\|_V = 1$ sowie $\langle f_k, v_k\rangle \geq (1-\varepsilon)\|f_k\|_{V^*}$.

3. Zuerst soll der Fall $p, q \in (1, \infty)$ betrachtet werden: Für die einfache Funktion $u = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_k} \|f_k\|_{V^*}^{q-1} v_k : X \to V$ gilt wegen Schritt 2 und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ einerseits

$$\begin{aligned}\int_X \|u\|_V^p \, d\mu &= \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)\|f_k\|_{V^*}^{p(q-1)}\|v_k\|_V^p \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)\|f_k\|_{V^*}^q = \int_X \|f\|_{V^*}^q \, d\mu,\end{aligned}$$

woraus sich $u \in L^p(X; V)$ ergibt. Andererseits folgt

$$\begin{aligned}\int_X \langle f, u\rangle \, d\mu &= \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)\|f_k\|_{V^*}^{q-1}\langle f_k, v_k\rangle \\ &\geq (1-\varepsilon) \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)\|f_k\|_{V^*}^q = (1-\varepsilon) \int_X \|f\|_{V^*}^q \, d\mu\end{aligned}$$

und somit $\int_X \langle f, u\rangle \, d\mu \geq \int_X \|f\|_{V^*}^q \, d\mu = \int_X \|u\|_V^p \, d\mu$, da $\varepsilon > 0$ anfangs beliebig gewählt wurde. Daraus ergibt sich $\|Tf\|_{[L^p(X;V)]^*} \geq \|f\|_{L^q(X;V^*)}$ und wegen Schritt 1 auch $\|Tf\|_{[L^p(X;V)]^*} = \|f\|_{L^q(X;V^*)}$ für alle einfachen Funktionen $f \in L^q(X; V^*)$.

4. Im Falle $p = 1, q = \infty$ findet man im Hinblick auf Schritt 2 für jedes $\varepsilon \in (0, 1)$ einen Index $k \in \mathbb{N}$, so daß $E_k \in \mathfrak{A}$ eine Menge positiven endlichen Maßes ist und die Abschätzung $\|f_k\|_{V^*} \geq (1-\varepsilon)\|f\|_{L^\infty(X;V^*)}$ gilt. Dann erfüllt die einfache Funktion $u = \mathbb{1}_{E_k} v_k : X \to V$ sowohl $\int_X \|u\|_V \, d\mu = \mu(E_k)\|v_k\|_V = \mu(E_k)$ als auch

$$\int_X \langle f, u\rangle \, d\mu = \mu(E_k)\langle f_k, v_k\rangle \geq (1-\varepsilon)\, \mu(E_k)\|f_k\|_{V^*} \geq (1-\varepsilon)^2 \mu(E_k)\|f\|_{L^\infty(X;V^*)}.$$

Daraus folgt $\|Tf\|_{[L^1(X;V)]^*} \geq \|f\|_{L^\infty(X;V^*)}$ und mit Schritt 1 auch die Identität $\|Tf\|_{[L^1(X;V)]^*} = \|f\|_{L^\infty(X;V^*)}$ für alle einfachen Funktionen $f \in L^\infty(X;V^*)$.

5. Da die Menge der einfachen Funktionen aus $L^q(X;V^*)$ stets ein dichter linearer Teilraum von $L^q(X;V^*)$ ist, folgt aufgrund der vorhergehenden Schritte die Gültigkeit der Identität $\|Tf\|_{[L^p(X;V)]^*} = \|f\|_{L^q(X;V^*)}$ für beliebige $f \in L^q(X;V^*)$. □

Isometrische Abbildung auf den Dualraum. Seien $p \in [1,\infty)$, $q \in (1,\infty]$ mit der Eigenschaft $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ vorgegeben. Dann wird durch die Vorschrift

$$\langle Tf, u\rangle = \int_X \langle f, u\rangle \, d\mu \quad \text{für } f \in L^q(X;V^*), u \in L^p(X;V),$$

ein isometrischer Isomorphismus $T : L^q(X;V^*) \leftrightarrow [L^p(X;V)]^*$ definiert.

Beweis. 1. Um zu zeigen, daß die Abbildung $T \in \mathcal{L}\big(L^q(X;V^*);[L^p(X;V)]^*\big)$ surjektiv ist, wird ein Funktional $h \in [L^p(X;V)]^*$ festgehalten und eine Zerlegung $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ von X in Mengen endlichen Maßes betrachtet. Für alle $k \in \mathbb{N}$ und $E \in \mathfrak{A}$ wird durch die Zuordnung $v \mapsto \langle h, \mathbb{1}_{E\cap X_k} v\rangle$ ein lineares stetiges Funktional auf V definiert, denn es gilt die Abschätzung

$$|\langle h, \mathbb{1}_{E\cap X_k} v\rangle| \leq \|h\|_{[L^p(X;V)]^*}\, \mu(E\cap X_k)^{1/p} \|v\|_V \quad \text{für jedes } v \in V.$$

Für jedes fixierte $k \in \mathbb{N}$ definiert man eine Mengenfunktion $\nu_k : \mathfrak{A} \to V^*$ durch

$$\langle \nu_k(E), v\rangle = \langle h, \mathbb{1}_{E\cap X_k} v\rangle \quad \text{für } E \in \mathfrak{A}, v \in V.$$

2. Sei $\{A_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ eine Zerlegung einer Menge $E \in \mathfrak{A}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es eine Folge $\{u_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset V$, welche die Eigenschaften $\|u_\ell\|_V = 1$ und $\langle \nu_k(A_\ell), u_\ell\rangle \geq \|\nu_k(A_\ell)\|_{V^*} - \frac{\varepsilon}{2^\ell}$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ erfüllt. Wegen der Abschätzung

$$\int_X \big\|\textstyle\sum_{\ell=1}^m \mathbb{1}_{A_\ell\cap X_k} u_\ell\big\|_V^p \, d\mu = \sum_{\ell=1}^m \int_{A_\ell\cap X_k} \|u_\ell\|_V^p \, d\mu \leq \mu(E\cap X_k)$$

ergibt sich für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{\ell=1}^m \|\nu_k(A_\ell)\|_{V^*} - \varepsilon &\leq \textstyle\sum_{\ell=1}^m \langle \nu_k(A_\ell), u_\ell\rangle \\ &= \big\langle h, \textstyle\sum_{\ell=1}^m \mathbb{1}_{A_\ell\cap X_k} u_\ell\big\rangle \leq \|h\|_{[L^p(X;V)]^*}\, \mu(E\cap X_k)^{1/p}.\end{aligned}$$

Wegen der willkürlichen Wahl von $\varepsilon > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ folgt daraus

$$\textstyle\sum_{\ell=1}^\infty \|\nu_k(A_\ell)\|_{V^*} \leq \|h\|_{[L^p(X;V)]^*}\, \mu(E\cap X_k)^{1/p}$$

und somit die absolute Konvergenz der Reihe $\big\{\sum_{\ell=1}^m \nu_k(A_\ell)\big\}_{m\in\mathbb{N}}$ in V^*, also auch

$$\textstyle\sum_{\ell=1}^\infty \langle \nu_k(A_\ell), v\rangle = \lim\limits_{m\to\infty} \sum_{\ell=1}^m \langle h, \mathbb{1}_{A_\ell\cap X_k} v\rangle \quad \text{für alle } v \in V.$$

Zusammen mit der Konvergenzbeziehung

$$\lim_{m\to\infty} \int_X \big|\mathbb{1}_{\cup_{\ell=1}^m A_\ell\cap X_k} - \mathbb{1}_{E\cap X_k}\big|^p d\mu = \lim_{m\to\infty} \mu\big(\cup_{\ell=m+1}^\infty A_\ell \cap X_k\big) = 0$$

ergibt sich $\big\langle \sum_{\ell=1}^\infty \nu_k(A_\ell), v\big\rangle = \langle h, \mathbb{1}_{E\cap X_k} v\rangle = \langle \nu_k(E), v\rangle$ für alle $v \in V$.

Somit ist $\nu_k : \mathfrak{A} \to V^*$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein Maß von beschränkter Variation, denn

$$\|\nu_k(E)\|_{V^*} \le |\nu_k|(E) \le \|h\|_{[L^p(X;V)]^*}\, \mu(E \cap X_k)^{1/p} \quad \text{für alle } E \in \mathfrak{A}.$$

Da daraus im Falle $\mu(E) = 0$ auch $\nu_k(E) = 0$ folgt, ergibt sich auch die absolute Stetigkeit von ν_k bezüglich μ, das heißt, es gilt $\nu_k \in M(\mathfrak{A}; V^*)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Der Darstellungssatz von Dunford-Pettis liefert daher für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Funktion $f_k \in L^1(X; V^*)$, so daß $\nu_k \in M(\mathfrak{A}; V^*)$ die Darstellung $\nu_k(E) = \int_E f_k\, d\mu$ für alle $E \in \mathfrak{A}$ besitzt. Da für jede Menge $E \in \mathfrak{A}$ mit $E \cap X_k = \varnothing$ stets

$$\left\langle \int_E f_k\, d\mu, v\right\rangle = \langle \nu_k(E), v\rangle = \langle h, \mathbb{1}_{E\cap X_k} v\rangle = 0 \quad \text{für alle } v \in V \text{ gilt,}$$

ergibt sich $f_k = 0$ fast überall auf $X \setminus X_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

3. Man definiert die meßbare Funktion $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k : X \to V^*$ und wählt eine aufsteigende Folge $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ von Mengen endlichen Maßes mit $\cup_{n=1}^{\infty} Y_n = X$. Bildet man für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$E_n = \left\{x \in Y_n : \|f(x)\|_{V^*} \le n\right\} \in \mathfrak{A}$$

endlichen Maßes, dann ist $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ ebenfalls eine aufsteigende Folge. Ferner existiert wegen Schritt 2 eine Nullmenge $N \in \mathfrak{A}$ mit $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \cup N = X$.

Daraus ergibt sich sofort $\mathbb{1}_{E_n} f \in L^q(X; V^*)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Man betrachtet eine einfache Funktion $u \in L^p(X; V)$ und wählt eine Zerlegung $\{A_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ von X in Mengen endlichen Maßes sowie eine Folge $\{v_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset V$, so daß die Darstellung $u = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_\ell} v_\ell$ gilt. Die Hölder-Ungleichung liefert zunächst $\langle \mathbb{1}_{E_n} f, u\rangle \in L^1(X; \mathbb{K})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Aufgrund der Definition von f und u erhält man somit

$$\begin{aligned}\int_X \langle \mathbb{1}_{E_n} f, u\rangle\, d\mu &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_{A_\ell\cap E_n} \langle f, v_\ell\rangle\, d\mu = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_\ell\cap E_n\cap X_k} \langle f_k, v_\ell\rangle\, d\mu \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \langle h, \mathbb{1}_{A_\ell\cap E_n\cap X_k} v_\ell\rangle = \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle h, \mathbb{1}_{E_n} \mathbb{1}_{A_\ell} v_\ell\rangle = \langle h, \mathbb{1}_{E_n} u\rangle.\end{aligned}$$

Somit gilt für alle einfachen Funktionen $u \in L^p(X; V)$ die Abschätzung

$$|\langle T(\mathbb{1}_{E_n} f), u\rangle| = |\langle h, \mathbb{1}_{E_n} u\rangle| \le \|h\|_{[L^p(X;V)]^*} \|u\|_{L^p(X;V)} \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Da die Menge der einfachen Funktionen aus $L^p(X; V)$ ein dichter linearer Teilraum von $L^p(X; V)$ und T eine isometrische Abbildung ist, ergibt sich

$$\|\mathbb{1}_{E_n} f\|_{L^q(X;V^*)} = \|T(\mathbb{1}_{E_n} f)\|_{[L^p(X;V)]^*} \le \|h\|_{[L^p(X;V)]^*} \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

4. Im Falle $p = 1, q = \infty$ folgt $f \in L^\infty(X; V^*)$ und $\|f\|_{L^\infty(X;V^*)} \le \|h\|_{[L^p(X;V)]^*}$, da es eine Nullmenge $N \in \mathfrak{A}$ mit $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \cup N = X$ gibt.

Sind $p, q \in (1, \infty)$ durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ verknüpft, so liefert der Satz von Fatou und Schritt 3 ebenfalls $f \in L^q(X; V^*)$, denn im Grenzprozeß $n \to \infty$ ergibt sich

$$\int_X \|f\|_{V^*}^q\, d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} \|\mathbb{1}_{E_n} f\|_{V^*}^q\, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X \|\mathbb{1}_{E_n} f\|_{V^*}^q\, d\mu \le \|h\|_{[L^p(X;V)]^*}^q,$$

da eine Nullmenge $N \in \mathfrak{A}$ mit $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \cup N = X$ existiert.

5. Man betrachtet erneut eine einfache Funktion $u \in L^p(X;V)$ und wählt eine Zerlegung $\{A_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ von X in Mengen endlichen Maßes sowie eine Folge $\{v_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset V$, so daß die Darstellung $u = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_\ell} v_\ell$ gilt. Die Hölder-Ungleichung liefert nunmehr $\langle f, u\rangle \in L^1(X;\mathbb{K})$. Aufgrund der Definition von u ergibt sich

$$\begin{aligned}\langle Tf, u\rangle &= \textstyle\int_X \langle f, u\rangle \, d\mu = \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_{A_\ell} \langle f, v_\ell\rangle \, d\mu = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_\ell \cap X_k} \langle f_k, v_\ell\rangle \, d\mu \\ &= \textstyle\sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \langle h, \mathbb{1}_{A_\ell \cap X_k} v_\ell\rangle = \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle h, \mathbb{1}_{A_\ell} v_\ell\rangle = \langle h, u\rangle.\end{aligned}$$

Da die einfache Funktion $u \in L^p(X;V)$ beliebig gewählt wurde und die Menge der einfachen Funktionen aus $L^p(X;V)$ ein dichter linearer Teilraum von $L^p(X;V)$ ist, folgt für $f \in L^q(X;V^*)$ schließlich $Tf = h \in [L^p(X;V)]^*$ und somit die Surjektivität der isometrischen Abbildung $T \in \mathcal{L}\big(L^q(X;V^*); [L^p(X;V)]^*\big)$. $\square$