Vorlesung 23

# Adjungierte Abbildungen

**Adjungierte Abbildungen.** Seien $(V, \| \ \|_V)$ und $(W, \| \ \|_W)$ Banach-Räume über demselben Körper $\mathbb{K}$.

1. Zu jeder Abbildung $T \in \mathcal{L}(V; W)$ wird durch die Vorschrift

$$\langle T^* g, u \rangle = \langle g, Tu \rangle \quad \text{für } g \in W^*, u \in V$$

die *adjungierte Abbildung* $T^* \in \mathcal{L}(W^*; V^*)$ definiert.

2. Es gilt $\|T^*\| \le \|T\|$ für jedes $T \in \mathcal{L}(V; W)$.
3. Ist $(W, \| \ \|_W)$ außerdem separabel, so gilt $\|T^*\| = \|T\|$ für jedes $T \in \mathcal{L}(V; W)$.

*Beweis.* 1. Für $T \in \mathcal{L}(V; W)$ und $g \in W^*$ ist die Zuordnung $u \mapsto \langle g, Tu \rangle$ ein lineares Funktional auf $V$ mit

$$|\langle g, Tu \rangle| \le \|g\|_{W^*} \|Tu\|_W \le \|T\| \|g\|_{W^*} \|u\|_V \quad \text{für alle } u \in V.$$

Somit wird für jedes $g \in W^*$ durch $\langle T^* g, u \rangle = \langle g, Tu \rangle$ für $u \in V$ ein Funktional $T^* g \in V^*$ definiert. Die Zuordnung $g \mapsto T^* g$ ist eine lineare Abbildung von $W^*$ nach $V^*$ mit $|\langle T^* g, u \rangle| \le \|T\| \|g\|_{W^*} \|u\|_V$ für alle $g \in W^*$, $u \in V$, das heißt, es gilt $\|T^* g\|_{V^*} \le \|T\| \|g\|_{W^*}$ für jedes $g \in W^*$. Daraus folgt $T^* \in \mathcal{L}(W^*; V^*)$ sowie die Abschätzung $\|T^*\| \le \|T\|$.

2. Ist $(W, \| \ \|_W)$ außerdem separabel, dann gibt es zu dem $u \in V$ mit $\|u\|_V \le 1$ und $Tu \neq 0$ nach dem Trennungssatz ein Funktional $g \in W^*$ mit $\langle g, Tu \rangle = \|Tu\|_W$ und $\|g\|_{W^*} = 1$. Daraus folgt

$$\|Tu\|_W = \langle g, Tu \rangle = \langle T^* g, u \rangle \le \|T^*\| \|g\|_{W^*} \|u\|_V \le \|T^*\|,$$

was auch im Falle $Tu = 0$ trivial erfüllt ist. Somit liefert die Bildung des Supremums über $u \in V$, $\|u\|_V \le 1$ die Beziehung $\|T\| \le \|T^*\|$, also insgesamt $\|T\| = \|T^*\|$. □

**Zweite adjungierte Abbildung.** Seien $(V, \| \ \|_V)$, $(W, \| \ \|_W)$ Banach-Räume über demselben Körper $\mathbb{K}$ sowie $J_V \in \mathcal{L}(V; V^{**})$ und $J_W \in \mathcal{L}(W; W^{**})$ die natürlichen Einbettungen in die bidualen Räume. Dann gilt für die zweite adjungierte Abbildung $T^{**} \in \mathcal{L}(V^{**}; W^{**})$ von $T \in \mathcal{L}(V; W)$ die Darstellung $T^{**} J_V = J_W T$.

*Beweis.* Für alle $g \in W^*$ und $u \in V$ gilt nach Definition

$$\langle T^{**} J_V u, g \rangle = \langle J_V u, T^* g \rangle = \langle T^* g, u \rangle = \langle g, Tu \rangle = \langle J_W T u, g \rangle$$

und damit $T^{**} J_V u = J_W T u$ für jedes $u \in V$, also $T^{**} J_V = J_W T$. □

**Adjungierte verketteter Abbildungen.** Sind $(V, \| \ \|_V)$, $(W, \| \ \|_W)$ und $(X, \| \ \|_X)$ Banach-Räume über demselben Körper $\mathbb{K}$, dann gilt $(AT)^* = T^*A^* \in \mathcal{L}(X^*; V^*)$ für alle $T \in \mathcal{L}(V; W)$ und $A \in \mathcal{L}(W; X)$.

*Beweis.* Für alle $h \in X^*$ und $u \in V$ gilt

$$\langle (AT)^*h, u\rangle = \langle h, ATu\rangle = \langle A^*h, Tu\rangle = \langle T^*A^*h, u\rangle$$

und somit $(AT)^*h = T^*A^*h$ für alle $h \in X^*$, also $(AT)^* = T^*A^*$. □

**Adjungierte invertierbarer Abbildungen.** 1. Sind $(V, \| \ \|_V)$, $(W, \| \ \|_W)$ Banach-Räume über demselben Körper $\mathbb{K}$ und $T : V \leftrightarrow W$ ein Isomorphismus, dann ist auch $T^* : W^* \leftrightarrow V^*$ ein Isomorphismus, und es gilt $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

2. Seien $(V, \| \ \|_V)$ und $(W, \| \ \|_W)$ separable Banach-Räume über demselben Körper $\mathbb{K}$ sowie $T \in \mathcal{L}(V; W)$. Ist $T^* : W^* \leftrightarrow V^*$ ein Isomorphismus, dann ist auch $T : V \leftrightarrow W$ ein Isomorphismus.

*Beweis.* 1. Ist $T : V \leftrightarrow W$ ein Isomorphismus, dann gilt $I_V = T^{-1}T \in \mathcal{L}(V; V)$ und

$$I_{V^*} = I_V^* = (T^{-1}T)^* = T^*(T^{-1})^* \in \mathcal{L}(V^*; V^*).$$

Genauso folgt aus $I_W = TT^{-1} \in \mathcal{L}(W; W)$ die Identität

$$I_{W^*} = I_W^* = (TT^{-1})^* = (T^{-1})^*T^* \in \mathcal{L}(W^*; W^*).$$

Somit besitzt $T^* \in \mathcal{L}(W^*; V^*)$ die Inverse $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^* \in \mathcal{L}(V^*; W^*)$.

2. Hat $T \in \mathcal{L}(V; W)$ die Eigenschaft, daß $T^* : W^* \leftrightarrow V^*$ ein Isomorphismus ist, dann folgt nach Schritt 1, daß auch $T^{**} : V^{**} \leftrightarrow W^{**}$ ein Isomorphismus ist und somit abgeschlossene Mengen in ebensolche überführt. Wegen der Separabilität von $(V, \| \ \|_V)$ und $(W, \| \ \|_W)$ sind die natürlichen Einbettungen $J_V \in \mathcal{L}(V; V^{**})$ und $J_W \in \mathcal{L}(W; W^{**})$ Isometrien. Zusammen mit der Identität $T^{**}J_V = J_W T$ ergibt sich daraus, daß $J_W T[V] = T^{**}J_V[V] \subset J_W[W]$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von $W^{**}$ ist. Da $J_W : W \leftrightarrow J_W[W]$ ein Isomorphismus ist, muß demnach auch $T[V] = J_W^{-1}T^{**}J_V[V]$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von $W$ sein.

3. Angenommen, es gäbe ein $w \in W$ mit $w \notin T[V]$. Dann könnte man aufgrund des Trennungssatzes ein Funktional $g \in W^*$ mit $\|g\|_{W^*} = 1$ finden, so daß $\langle T^*g, u\rangle = \langle g, Tu\rangle = 0$ für alle $u \in V$ und somit $T^*g = 0$ gelten würde. Da $T^* : W^* \leftrightarrow V^*$ nach Voraussetzung injektiv ist, würde daraus $g = 0$ im Widerspruch zur Wahl von $g \in W^*$ folgen. Somit war die Annahme falsch, das heißt, man erhält $T[V] = W$ und daher die Surjektivität von $T \in \mathcal{L}(V; W)$.

4. Gilt $Tu = 0$ für ein $u \in V$, dann folgt daraus $T^{**}J_V u = J_W Tu = 0$, und die Injektivität von $T^{**} : V^{**} \leftrightarrow W^{**}$ liefert $J_V u = 0$, also $u = 0$ wegen der Isometrie von $J_V \in \mathcal{L}(V; V^{**})$. Damit ist $T \in \mathcal{L}(V; W)$ auch injektiv. Zusammen mit Schritt 3 folgt aus dem Inversensatz von Banach, daß $T : V \leftrightarrow W$ ein Isomorphismus ist. □