Vorlesung 25

Lineare Gleichungen mit Fredholm-Operatoren

Eine in der angewandten Funktionalanalysis häufig auftretende Aufgabenstellung ist die Suche nach Lösungen $u \in V$ von Gleichungen des Typs $Su - Tu = w$ für vorgegebene rechte Seiten $w \in W$, wobei $S \in \mathcal{L}(V;W)$ ein Isomorphismus von einem Banach-Raum $(V, \| \ \|_V)$ auf einen weiteren Banach-Raum $(W, \| \ \|_W)$ über $\mathbb{K}$ sowie $T \in \mathcal{K}(V;W)$ eine vollstetige Störung ist. Solche Abbildungen $A = S - T$ besitzen die *Fredholm-Eigenschaft* und den *Fredholm-Index* Null:

Fredholm-Eigenschaft. Seien $(V, \| \ \|_V)$, $(W, \| \ \|_W)$ Banach-Räume über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $A \in \mathcal{L}(V;W)$ besitzt die *Fredholm-Eigenschaft*, wenn der Kern $A^{-1}[\{0\}]$ ein endlichdimensionaler linearer Teilraum von V und der Bildraum $A[V]$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von W endlicher Codimension ist. In diesem Falle wird $\operatorname{ind} A = \dim A^{-1}[\{0\}] - \operatorname{codim} A[V] \in \mathbb{Z}$ als *Fredholm-Index von A* bezeichnet.

Äquivalente Formulierung des Problems als Operatorgleichung. Offenbar ist $u \in V$ genau dann Lösung der Gleichung $Su - Tu = w$ für die rechte Seite $w \in W$, wenn $u \in V$ Lösung der äquivalenten Operatorgleichung $I_V u - S^{-1}Tu = S^{-1}w$ für die rechte Seite $S^{-1}w \in V$ ist, wobei nunmehr die Identität $I_V \in \mathcal{L}(V;V)$ von der vollstetigen Abbildung $S^{-1}T \in \mathcal{K}(V;V)$ gestört wird.

Der Nachweis, daß Operatoren $I - T \in \mathcal{L}(V;V)$ mit $T \in \mathcal{K}(V;V)$ die Fredholm-Eigenschaft sowie den Fredholm-Index Null besitzen, ist Gegenstand der klassischen Theorie von Riesz über lineare Gleichungen mit vollstetigen Operatoren:

Hilfssatz von Riesz. Seien $(V, \| \ \|_V)$ ein Banach-Raum , $T \in \mathcal{L}(V;V)$ sowie V_1, V_2 abgeschlossene lineare Teilräume von V mit $V_1 \subset V_2$, $V_1 \neq V_2$ und $(I - T)[V_2] \subset V_1$. Dann existiert ein $u \in V_2$ mit $u \notin V_1$, $\|u\|_V = 1$ und $\|Tu - Tv\|_V \geq \frac{1}{2}$ für alle $v \in V_1$.

Beweis. Sei $w \in V_2$ mit $w \notin V_1$ gewählt. Dann gilt wegen der Abgeschlossenheit von V_1 stets $\delta = \inf\big\{\|w - v\|_V : v \in V_1\big\} > 0$. Demnach gibt es ein $v_1 \in V_1$ mit $\delta \leq \|w - v_1\|_V \leq 2\delta$. Definiert man $u = \frac{w - v_1}{\|w - v_1\|_V} \in V_2$, dann gilt $\|u\|_V = 1$ und

$$\|w - v_1\|_V(u - v_0) = (w - v_1) - \|w - v_1\|_V v_0 \quad \text{für alle } v_0 \in V_1.$$

Wegen $v_1 + \|w - v_1\|_V v_0 \in V_1$ folgt daraus

$$\delta \leq \|w - (v_1 + \|w - v_1\|_V v_0)\|_V = \|w - v_1\|_V \|u - v_0\|_V \leq 2\delta \|u - v_0\|_V$$

und somit $\|u - v_0\|_V \geq \frac{1}{2}$ für alle $v_0 \in V_1$. Da für jedes $v \in V_1 \subset V_2$ wegen $u \in V_2$ und $(I - T)[V_2] \subset V_1$ stets $v + (I - T)(u - v) \in V_1$ gilt, ergibt sich demnach

$$\|Tu - Tv\|_V = \|u - (v + (I - T)(u - v))\|_V \geq \tfrac{1}{2}$$

für alle $v \in V_1$. □

Satz von Riesz über die Fredholm-Eigenschaft. Sei $(V, \| \ \|_V)$ ein Banach-Raum sowie $T \in \mathcal{K}(V;V)$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. Der Kern $N_1 = (I-T)^{-1}[\{0\}]$ ist ein linearer Teilraum endlicher Dimension.
2. Es gibt eine nur von T abhängige Konstante $c_T \geq 0$, so daß die Abschätzung

$$\min_{v \in N_1} \|u_0 + v\|_V \leq c_T \|(I-T)u_0\|_V \quad \text{für alle } u_0 \in V \text{ gilt.}$$

3. Der Bildraum $F_1 = (I-T)[V] \subset V$ ist ein abgeschlossener linearer Teilraum endlicher Codimension.

Beweis. 1. Für jedes $v \in N_1 = (I-T)^{-1}[\{0\}]$ gilt $Tv = v$, also $T[N_1] = N_1$. Sei $K = \big\{u \in V : \|u\|_V \leq 1\big\}$ die abgeschlossene Einheitskugel in $(V, \| \ \|_V)$. Dann ist $T[K]$ wegen $T \in \mathcal{K}(V;V)$ relativ kompakt in $(V, \| \ \|_V)$ und damit auch der Durchschnitt $T[N_1 \cap K] = N_1 \cap K$ relativ kompakt im abgeschlossenen linearen Teilraum $(N_1, \| \ \|_V)$, woraus dessen Endlichdimensionalität folgt.

2. Sei $w_0 \in F_1 = (I-T)[V]$ vorgegeben. Gilt $(I-T)u_1 = w_0$ und $(I-T)u_2 = w_0$ für $u_1, u_2 \in V$, dann erfüllt die Differenz $v = u_1 - u_2 \in V$ offenbar $(I-T)v = 0$, es gilt also $v = u_1 - u_2 \in N_1$. Gilt umgekehrt $(I-T)u_0 = w_0$ für $u_0 \in V$ sowie $(I-T)v = 0$ für $v \in N_1$, dann folgt $(I-T)u = w_0$ für die Summe $u = u_0 + v \in V$. Somit gilt für alle $u_0 \in V$ und $w_0 \in F_1$ mit $(I-T)u_0 = w_0$ die Identität

$$\big\{u \in V : (I-T)u = w_0\big\} = \big\{u_0 + v \in V : v \in N_1\big\}.$$

3. Da $N_1 \subset V$ ein endlichdimensionaler Teilraum ist, wird das Minimum

$$\min_{v \in N_1} \|u_0 + v\|_V = \|u_0 + v_0\|_V$$

für jedes $u_0 \in V$ von einem $v_0 \in N_1$ angenommen. Angenommen, es würde Folgen $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ und $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset F_1$ mit $(I-T)u_k = w_k \neq 0$ für $k \in \mathbb{N}$ sowie eine wachsende Folge $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $\lim_{k\to\infty} c_k = \infty$ und der Eigenschaft

$$\min_{v \in N_1} \|u_k + v\|_V \geq c_k \|w_k\|_V > 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ geben.}$$

Dann könnte man eine Folge $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset N_1$ finden, so daß

$$\|u_k + v_k\|_V = \min_{v \in N_1} \|u_k + v\|_V \geq c_k \|w_k\|_V > 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ gelten würde.}$$

Würde man $\alpha_k > 0$ für $k \in \mathbb{N}$ durch $\alpha_k \|u_k + v_k\|_V = 1$ definieren, so erhielte man

$$1 = \|\alpha_k(u_k + v_k)\|_V = \min_{v \in N_1} \|\alpha_k(u_k + v)\|_V \geq c_k \|\alpha_k w_k\|_V > 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

und somit $\lim_{k\to\infty} \|\alpha_k w_k\|_V = 0$ wegen $\lim_{k\to\infty} c_k = \infty$. Außerdem wäre aufgrund der Beschränktheit der Folge $\{\alpha_k(u_k + v_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ in V sowie $T \in \mathcal{K}(V;V)$ die Bildfolge $\{\alpha_k T(u_k + v_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ relativ kompakt in V.

Man könnte also eine wachsende Folge $\{k_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ finden, so daß die Folge $\{\alpha_{k_\ell} T(u_{k_\ell}+v_{k_\ell})\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ in V gegen einen Grenzwert $v_0 \in V$ konvergieren würde. Wegen der Darstellung

$$\alpha_k(u_k+v_k) = \alpha_k T(u_k+v_k) + \alpha_k w_k \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{N}$$

würde aus $\lim_{k\to\infty} \|\alpha_k w_k\|_V = 0$ und $\lim_{\ell\to\infty} \|\alpha_{k_\ell} T(u_{k_\ell}+v_{k_\ell}) - v_0\|_V = 0$ zunächst $\lim_{\ell\to\infty} \|\alpha_{k_\ell}(u_{k_\ell}+v_{k_\ell}) - v_0\|_V = 0$ und dann $\lim_{\ell\to\infty} \|\alpha_{k_\ell} T(u_{k_\ell}+v_{k_\ell}) - Tv_0\|_V = 0$ folgen, woraus sich $Tv_0 = v_0$ und damit $v_0 \in N_1$ ergäbe. Mit $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset N_1$ würde daraus für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$1 = \min_{v\in N_1} \|\alpha_{k_\ell}(u_{k_\ell}+v)\|_V = \min_{v\in N_1} \|\alpha_{k_\ell}u_{k_\ell}+v\|_V \le \|\alpha_{k_\ell}u_{k_\ell} + (\alpha_{k_\ell}v_{k_\ell} - v_0)\|_V$$

folgen, was jedoch $\lim_{\ell\to\infty} \|\alpha_{k_\ell}(u_{k_\ell}+v_{k_\ell}) - v_0\|_V = 0$ widerspräche. Damit war die Annahme falsch, und es existiert eine nur von T abhängige Konstante $c_T \ge 0$, so daß

$$\min_{v\in N_1} \|u_0+v\|_V \le c_T \|(I-T)u_0\|_V \quad \text{für alle } u_0 \in V \text{ gilt.}$$

4. Sei $w_0 \in \operatorname{cl} F_1$ beliebig vorgegeben. Man wählt eine Folge $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset F_1$ mit $\|w_k - w_0\|_V \le 2^{-k-1}$ und somit

$$\|w_{k+1} - w_k\|_V \le \|w_{k+1} - w_0\|_V + \|w_k - w_0\|_V \le 2^{-k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Wegen $F_1 = (I-T)[V]$ gibt es ein $u_0 \in V$ und eine Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in V$ mit

$$(I-T)u_0 = w_1 \quad \text{sowie} \quad (I-T)u_k = w_{k+1} - w_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Nach Schritt 3 findet man außerdem ein $v_0 \in N_1$ und eine Folge $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset N_1$ mit

$$\|u_0+v_0\|_V \le c_T\|w_1\|_V \quad \text{sowie} \quad \|u_k+v_k\|_V \le c_T\|w_{k+1}-w_k\|_V \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Es folgt $\|u_k+v_k\|_V \le 2^{-k}c_T$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, also die absolute Konvergenz der Reihe $\left\{\sum_{k=0}^m (u_k+v_k)\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ in V. Für deren Grenzwert $\sum_{k=0}^\infty (u_k+v_k) \in V$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\left\|(I-T)\textstyle\sum_{k=0}^\infty (u_k+v_k) - w_0\right\|_V &= \lim_{m\to\infty} \left\|\textstyle\sum_{k=0}^m (I-T)(u_k+v_k) - w_0\right\|_V \\ &= \lim_{m\to\infty} \left\|(w_1-w_0) + \textstyle\sum_{k=1}^m (w_{k+1}-w_k)\right\|_V = \lim_{m\to\infty} \|w_{m+1}-w_0\|_V = 0,\end{aligned}$$

also $w_0 = (I-T)\sum_{k=0}^\infty (u_k+v_k) \in F_1 = (I-T)[V]$. Somit ist F_1 ein abgeschlossener linearer Teilraum von V.

5. Angenommen, $F_1 = (I-T)[V] \subset V$ wäre von unendlicher Codimension. Dann gäbe es eine unendliche Folge $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$, so daß

$$w_k \notin V_{k-1} = F_1 + \operatorname{lin}\{w_1,\dots,w_{k-1}\} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

gelten würde. Wegen der Abgeschlossenheit des Bildraums F_1 in V wäre auch V_k für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von V.

Aufgrund der Beziehungen $V_{k-1} \subset V_k \subset V$, $V_{k-1} \neq V_k$ und

$$(I - T)[V_k] \subset (I - T)[V] = F_1 \subset V_\ell \quad \text{für alle } k, \ell \in \mathbb{N}$$

würde der Hilfssatz von Riesz die induktive Konstruktion einer Folge $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ mit $v_k \in V_k$, $v_k \notin V_{k-1}$, $\|v_k\|_V = 1$ sowie

$$\|Tv_k - Tv_\ell\|_V \geq \tfrac{1}{2} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, \ell \in \{1, \ldots, k-1\}$$

gestatten. Die Bildfolge $\{Tv_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ könnte also im Widerspruch zu $T \in \mathcal{K}(V; V)$ und der Beschränktheit der Folge $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in V keinen Häufungspunkt in V besitzen. Somit war die Annahme falsch, das heißt, $F_1 = (I - T)[V] \subset V$ ist von unendlicher Codimension. $\square$