Vorlesung 27

Adjungierte Gleichungen und Fredholm-Alternative

Die Theorie von Riesz über Fredholm-Operatoren $I - T \in \mathcal{L}(V; V)$ mit dem Index Null und die Lösbarkeit der Gleichung $(I - T)u = w$ mit vollstetigen Operatoren $T \in \mathcal{K}(V; V)$ wird durch die Theorie von Schauder mit der Fredholm-Eigenschaft des adjungierten Operators $I^* - T^* \in \mathcal{L}(V^*; V^*)$ mit dem Index Null und der Lösbarkeit der adjungierten Gleichung $(I^* - T^*)f = h$ mit vollstetigen Operatoren $T^* \in \mathcal{K}(V^*; V^*)$ in Zusammenhang gebracht:

Annullatoren. Sei U ein linearer Teilraum eines Banach-Raums $(V, \|\ \|_V)$ und E ein linearer Teilraum des Dualraums $(V^*, \|\ \|_{V^*})$. Der *Annullator* $U^0 \subset V^*$ *von* $U \subset V$ wird als linearer Teilraum

$$U^0 = \big\{ f \in V^* : \langle f, u\rangle = 0 \ \text{ für alle } u \in U \big\}$$

definiert und der *Annullator* ${}^0E \subset V$ *von* $E \subset V^*$ als linearer Teilraum

$${}^0E = \big\{ u \in V : \langle f, u\rangle = 0 \ \text{ für alle } f \in E \big\}.$$

Dualitätssatz von Schauder über Fredholm-Operatoren. Sei ein Banach-Raum $(V, \|\ \|_V)$ über $\mathbb{K}$ sowie $T \in \mathcal{K}(V; V)$ gegeben. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. Der Annullator des Kerns von $I^* - T^* \in \mathcal{L}(V^*; V^*)$ ist der Bildraum von $I - T \in \mathcal{L}(V; V)$, das heißt, es gilt ${}^0(I^* - T^*)^{-1}[\{0\}] = (I - T)[V]$.
2. Der Operator $I - T \in \mathcal{L}(V; V)$ ist genau dann ein Isomorphismus von V auf V, wenn die Adjungierte $I^* - T^* \in \mathcal{L}(V^*; V^*)$ ein Isomorphismus von V^* auf V^* ist.
3. Der Annullator des Kerns von $I - T \in \mathcal{L}(V; V)$ ist der Bildraum von $I^* - T^* \in \mathcal{L}(V^*; V^*)$, das heißt, es gilt $(I - T)^{-1}[\{0\}]^0 = (I^* - T^*)[V^*]$.

Beweis. 1. Nach dem Satz von Riesz über den Fredholm-Index gibt es ein endlichdimensionales topologisches Komplement V_1 des abgeschlossenen linearen Teilraums $F_1 = (I - T)[V]$ in V mit $\dim V_1 = \operatorname{codim} F_1 = m \in \mathbb{N}_0$.

Im Falle $m = 0$ ist $I - T \in \mathcal{L}(V; V)$ ein Isomorphismus von V auf V, denn es gilt $(I - T)[V] = V$. Damit ist die Adjungierte $I^* - T^* \in \mathcal{L}(V^*; V^*)$ ein Isomorphismus von V^* auf V^*, und es gilt $(I^* - T^*)^{-1}[\{0\}] = \{0\}$. Nach Definition des Annullators ergibt sich also ${}^0(I^* - T^*)^{-1}[\{0\}] = {}^0\{0\} = V = (I - T)[V]$ im Falle $m = 0$.

Nachfolgend wird der Fall $m \geq 1$ untersucht: Da $V = F_1 + V_1$ eine topologisch direkte Summe ist, existiert der lineare stetige Projektor $P_1 \in \mathcal{L}(V; V)$ von V auf V_1. Ist $\{u_1, \dots, u_m\} \subset V_1$ eine Basis von V_1, dann wird für jedes $k \in \{1, \dots, m\}$ ein Funktional $g_k \in \mathcal{L}(V_1; \mathbb{K})$ durch folgende Zuordnung definiert:

$$u = \textstyle\sum_{\ell=1}^m \alpha_\ell u_\ell \in V_1 \mapsto \langle g_k, u\rangle = \alpha_k \in \mathbb{K}.$$

Bildet man für jedes $k \in \{1,\dots,m\}$ die Verkettung $f_k = g_k P_1 \in V^* = \mathcal{L}(V;\mathbb{K})$, dann ergibt sich

$$P_1 u = \textstyle\sum_{\ell=1}^m \langle g_\ell, P_1 u\rangle u_\ell = \sum_{\ell=1}^m \langle f_\ell, u\rangle u_\ell \quad \text{für alle } u \in V$$

sowie wegen $\{u_1,\dots,u_m\} \subset V_1$ auch

$$\langle f_\ell, u_k\rangle = \langle g_\ell, P_1 u_k\rangle = \langle g_\ell, u_k\rangle = \delta_{k\ell} \quad \text{für alle } k,\ell \in \{1,\dots,m\}.$$

Ferner gilt für alle $k \in \{1,\dots,m\}$ und jedes $u \in V$ stets

$$\langle (I^* - T^*) f_k, u\rangle = \langle f_k, (I-T)u\rangle = \langle g_k, P_1(I-T)u\rangle = 0$$

wegen $(I-T)u \in F_1$ sowie der Tatsache, daß $V = F_1 + V_1$ eine topologisch direkte Summe und $P_1 \in \mathcal{L}(V;V)$ der Projektor von V auf V_1 ist. Daraus folgt die Beziehung $f_k \in (I^* - T^*)^{-1}[\{0\}]$ für jedes $k \in \{1,\dots,m\}$.

Sei $w \in {}^0(I^* - T^*)^{-1}[\{0\}] \subset V$ beliebig vorgegeben. Dann gilt nach Definition $\langle f, w\rangle = 0$ für alle $f \in (I^* - T^*)^{-1}[\{0\}]$. Im Hinblick auf die topologisch direkte Summe $V = F_1 + V_1$ zerlegt man

$$w = (I-T)u + \textstyle\sum_{\ell=1}^m \alpha_\ell u_\ell$$

in eine Summe aus $(I-T)u \in F_1$ und $\sum_{\ell=1}^m \alpha_\ell u_\ell \in V_1$ für geeignetes $u \in V$ sowie $\alpha_1,\dots,\alpha_m \in \mathbb{K}$. Dann ergibt sich wegen $f_k \in (I^* - T^*)^{-1}[\{0\}]$ und $\langle f_k, u_\ell\rangle = \delta_{k\ell}$ für jedes $k,\ell \in \{1,\dots,m\}$ die Identität

$$0 = \langle f_k, w\rangle = \langle f_k, (I-T)u\rangle + \textstyle\sum_{\ell=1}^m \alpha_\ell \langle f_k, u_\ell\rangle = \langle (I^* - T^*) f_k, u\rangle + \alpha_k = \alpha_k,$$

also $w = (I-T)u \in F_1 = (I-T)[V]$.

Wird umgekehrt $w \in (I-T)[V]$ willkürlich vorgegeben, dann gibt es ein $u \in V$ mit $(I-T)u = w$. Für jedes $f \in (I^* - T^*)^{-1}[\{0\}]$ folgt dann

$$\langle f, w\rangle = \langle f, (I-T)u\rangle = \langle (I^* - T^*) f, u\rangle = 0,$$

also $w \in {}^0(I^* - T^*)^{-1}[\{0\}]$. Damit gilt die Identität ${}^0(I^* - T^*)^{-1}[\{0\}] = (I-T)[V]$ auch im Falle $m \geq 1$.

2. Ist $I - T \in \mathcal{L}(V;V)$ ein Isomorphismus von V auf V, dann ist auch die Adjungierte $I^* - T^* \in \mathcal{L}(V^*;V^*)$ ein Isomorphismus von V^* auf V^*. Ist umgekehrt $I^* - T^* \in \mathcal{L}(V^*;V^*)$ ein Isomorphismus von V^* auf V^*, dann ergibt sich aus der Injektivität $(I^* - T^*)^{-1}[\{0\}] = \{0\}$. Aufgrund von Schritt 1 erhält man die Identität $(I-T)[V] = {}^0(I^* - T^*)^{-1}[\{0\}] = {}^0\{0\} = V$. Damit ist $I - T \in \mathcal{L}(V;V)$ surjektiv. Wegen der Vollstetigkeit von $T \in \mathcal{K}(V;V)$ ist der Operator $I - T \in \mathcal{L}(V;V)$ nach dem Satz von Riesz über den Fredholm-Index ein Isomorphismus von V auf V.

3. Sei $f \in (I-T)^{-1}[\{0\}]^0 \subset V^*$ beliebig vorgegeben. Dann gilt nach Definition $\langle f, v\rangle = 0$ für alle $v \in N_1 = (I-T)^{-1}[\{0\}]$. Für jedes $w \in F_1 = (I-T)[V]$ und $u_0 \in V$ mit $(I-T)u_0 = w$ gilt die Darstellung

$$\{u \in V : (I-T)u = w\} = \{u_0 + v \in V : v \in N_1\}.$$

Da für alle $v \in N_1 = (I-T)^{-1}[\{0\}]$ stets $\langle f, u_0 + v\rangle = \langle f, u_0\rangle$ gilt, wird durch

$$\langle g_0, w\rangle = \langle f, u_0\rangle \quad \text{für } w \in F_1 \text{ und } u_0 \in V \text{ mit } (I-T)u_0 = w$$

ein wohldefiniertes lineares Funktional $g_0 : F_1 \to \mathbb{K}$ erklärt, denn sind $w_1, w_2 \in F_1$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ sowie $u_1, u_2 \in V$ mit $(I-T)u_1 = w_1$ und $(I-T)u_2 = w_2$ willkürlich vorgegeben, dann löst $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in V$ die Gleichung $(I-T)(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in F_1$, und man erhält definitionsgemäß

$$\begin{aligned}\langle g_0, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2\rangle &= \langle f, \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2\rangle \\ &= \lambda_1\langle f, u_1\rangle + \lambda_2\langle f, u_2\rangle = \lambda_1\langle g_0, w_1\rangle + \lambda_2\langle g_0, w_2\rangle.\end{aligned}$$

Aufgrund des Satzes von Riesz über Fredholm-Operatoren existiert eine Konstante $c_T \geq 0$, so daß die Normabschätzung

$$\min_{v \in N_1} \|u_0 + v\|_V \leq c_T \|w\|_V \quad \text{für alle } w \in F_1 \text{ und } u_0 \in V \text{ mit } (I-T)u_0 = w$$

gilt. Wird $w \in F_1$ beliebig vorgegeben und gilt $(I-T)u_0 = w$ für ein $u_0 \in V$, dann wird das Minimum $\|u_0 + v_0\|_V = \min_{v \in N_1} \|u_0 + v\|_V$ wegen der Endlichdimensionalität des Kerns $N_1 = (I-T)^{-1}[\{0\}]$ von einem $v_0 \in N_1$ angenommen, woraus

$$|\langle g_0, w\rangle| = |\langle f, u_0\rangle| = |\langle f, u_0 + v_0\rangle| \leq \|f\|_{V^*}\|u_0 + v_0\|_V \leq c_T \|f\|_{V^*}\|w\|_V$$

folgt. Somit ist $g_0 \in F_1^* = \mathcal{L}(F_1; \mathbb{K})$ ein lineares stetiges Funktional auf dem abgeschlossenen linearen Teilraum $F_1 = (I-T)[V]$ von V endlicher Codimension $\operatorname{codim} F_1 = m \in \mathbb{N}_0$. Außerdem gilt die Normabschätzung $\|g_0\|_{F_1^*} \leq c_T \|f\|_{V^*}$.

Somit kann man das Funktional $g_0 \in F_1^*$ wie im Beweis des Satzes von Hahn-Banach *ohne* die Voraussetzung der Separabilität des Raumes $(V, \|\ \|_V)$ durch eine *endliche* Anzahl *elementarer* Erweiterungen zu einem Funktional $g \in V^*$ auf dem Raum $V = F_1 + V_1$ mit $g|F_1 = g_0$ und $\|g\|_{V^*} = \|g_0\|_{F_1^*}$ fortsetzen. Daher gilt

$$\langle (I^* - T^*)g, u\rangle = \langle g, (I-T)u\rangle = \langle g_0, (I-T)u\rangle = \langle f, u\rangle \quad \text{für jedes } u \in V,$$

also $f = (I^* - T^*)g \in (I^* - T^*)[V^*]$.

Wird umgekehrt $f \in (I^* - T^*)[V^*]$ willkürlich vorgegeben, dann gibt es ein $g \in V^*$ mit $(I^* - T^*)g = f$. Für jedes $v \in (I-T)^{-1}[\{0\}]$ folgt daraus

$$\langle f, v\rangle = \langle (I^* - T^*)g, v\rangle = \langle g, (I-T)v\rangle = 0,$$

also $f \in (I-T)^{-1}[\{0\}]^0$. Damit gilt die Identität $(I-T)^{-1}[\{0\}]^0 = (I^* - T^*)[V^*]$. $\square$

Satz von Riesz-Schauder über die Fredholm-Alternative. Sei ein Banach-Raum $(V, \| \ \|_V)$ über $\mathbb{K}$ sowie $T \in \mathcal{K}(V; V)$ gegeben. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1.1. Die Kerne $(I - T)^{-1}[\{0\}]$ und $(I^* - T^*)^{-1}[\{0\}]$ haben dieselbe Dimension

$$\dim(I - T)^{-1}[\{0\}] = \dim(I^* - T^*)^{-1}[\{0\}] = m \in \mathbb{N}_0.$$

1.2. Die Bildräume $(I - T)[V]$ und $(I^* - T^*)[V^*]$ haben dieselbe Codimension

$$\operatorname{codim}(I - T)[V] = \operatorname{codim}(I^* - T^*)[V^*] = m \in \mathbb{N}_0.$$

2. Exklusive Fredholm-Alternative für die Lösbarkeit adjungierter Gleichungen:

2.1. Regulärer Fall $m = 0$: Jede der beiden inhomogenen Gleichungen

$$(I - T)u = w \quad \text{bzw.} \quad (I^* - T^*)f = h$$

hat für jedes $w \in V$ bzw. jedes $h \in V^*$ jeweils eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in V$ bzw. $f \in V^*$. Insbesondere haben die beiden homogenen Gleichungen

$$(I - T)v = 0 \quad \text{bzw.} \quad (I^* - T^*)g = 0$$

nur die trivialen Lösungen $v = 0 \in V$ bzw. $g = 0 \in V^*$.

2.2. Singulärer Fall $m \geq 1$: Die beiden homogenen Gleichungen

$$(I - T)v = 0 \quad \text{bzw.} \quad (I^* - T^*)g = 0$$

haben jeweils dieselbe positive (endliche) Anzahl linear unabhängiger Lösungen

$$\{v_1, \ldots, v_m\} \subset V \quad \text{bzw.} \quad \{g_1, \ldots, g_m\} \subset V^*.$$

In diesem Falle hat jede der beiden inhomogenen Gleichungen

$$(I - T)u_0 = w_0 \quad \text{bzw.} \quad (I^* - T^*)f_0 = h_0$$

genau dann eine Lösung $u_0 \in V$ bzw. $f_0 \in V^*$, wenn die rechten Seiten $w_0 \in V$ bzw. $h_0 \in V^*$ für jedes $k \in \{1, \ldots, m\}$ die Lösbarkeitsbedingungen

$$\langle g_k, w_0 \rangle = 0 \quad \text{bzw.} \quad \langle h_0, v_k \rangle = 0$$

erfüllen. Dabei hat jede Lösung $u \in V$ bzw. $f \in V^*$ der inhomogenen Gleichung

$$(I - T)u = w_0 \quad \text{bzw.} \quad (I^* - T^*)f = h_0$$

jeweils die Gestalt

$$u = u_0 + \textstyle\sum_{k=1}^m \alpha_k v_k \quad \text{bzw.} \quad f = f_0 + \sum_{k=1}^m \beta_k g_k$$

mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ bzw. $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{K}$.

Beweis. 1. Nach dem Satz von Schauder folgt aus der Vollstetigkeit von $T \in \mathcal{K}(V;V)$ die Vollstetigkeit von $T^* \in \mathcal{K}(V^*;V^*)$. Damit liefert der Satz von Riesz über den Fredholm-Index, daß die Kerne $(I-T)^{-1}[\{0\}] \subset V$ und $(I^*-T^*)^{-1}[\{0\}] \subset V^*$ jeweils lineare Teilräume endlicher Dimension und die Bildräume $(I-T)[V] \subset V$ und $(I^*-T^*)[V^*] \subset V^*$ jeweils abgeschlossene lineare Teilräume endlicher Codimension sind. Insbesondere haben die Fredholm-Operatoren $I-T \in \mathcal{L}(V;V)$ und $I^*-T^* \in \mathcal{L}(V^*;V^*)$ den Index Null, es gilt also

$$\dim(I-T)^{-1}[\{0\}] = \operatorname{codim}(I-T)[V] = m \in \mathbb{N}_0,$$
$$\dim(I^*-T^*)^{-1}[\{0\}] = \operatorname{codim}(I^*-T^*)[V^*] = s \in \mathbb{N}_0.$$

Nach dem Satz von Riesz über den Fredholm-Index gilt genau dann $m = 0$, wenn $I-T \in \mathcal{L}(V;V)$ ein Isomorphismus von V auf V ist. Aufgrund des Dualitätssatzes von Schauder ist dies äquivalent dazu, daß die Adjungierte $I^*-T^* \in \mathcal{L}(V^*;V^*)$ ein Isomorphismus von V^* auf V^* ist, was wiederum nach dem Satz von Riesz über den Fredholm-Index genau dann der Fall ist, wenn $s = 0$ gilt. Somit besteht die exklusive Fredholm-Alternative zwischen dem regulären Fall $m = s = 0$ und dem singulären Fall $m \geq 1$, $s \geq 1$, der im Folgenden betrachtet werden soll:

2. Da der Kern $(I-T)^{-1}[\{0\}]$ ein topologisches Komplement in V besitzt, existiert der lineare stetige Projektor $Q_1 \in \mathcal{L}(V;V)$ von V auf $(I-T)^{-1}[\{0\}]$. Sei $\{v_1,\dots,v_m\} \subset V$ eine Basis des Kerns $(I-T)^{-1}[\{0\}]$. Dann wird für jeden Index $k \in \{1,\dots,m\}$ durch die Zuordnung

$$v = \textstyle\sum_{\ell=1}^m \alpha_\ell v_\ell \in (I-T)^{-1}[\{0\}] \mapsto \langle h_k, v\rangle = \alpha_k \in \mathbb{K}$$

ein lineares stetiges Funktional $h_k : (I-T)^{-1}[\{0\}] \to \mathbb{K}$ definiert. Bildet man für jedes $k \in \{1,\dots,m\}$ die Verkettung $f_k = h_k Q_1 \in V^* = \mathcal{L}(V;\mathbb{K})$, dann erhält man

$$Q_1 u = \textstyle\sum_{\ell=1}^m \langle h_\ell, Q_1 u\rangle v_\ell = \sum_{\ell=1}^m \langle f_\ell, u\rangle v_\ell \quad \text{für alle } u \in V$$

sowie wegen $\{v_1,\dots,v_m\} \subset (I-T)^{-1}[\{0\}]$ auch

$$\langle f_\ell, v_k\rangle = \langle h_\ell, Q_1 v_k\rangle = \langle h_\ell, v_k\rangle = \delta_{k\ell} \quad \text{für alle } k,\ell \in \{1,\dots,m\}.$$

Ist $\{g_1,\dots,g_s\} \subset V^*$ eine Basis des Kerns $(I^*-T^*)^{-1}[\{0\}]$, dann findet man außerdem gemäß Aufgabe 10.2 ein System $\{u_1,\dots,u_s\} \subset V$, so daß

$$\langle g_\ell, u_k\rangle = \delta_{k\ell} \quad \text{für alle } k,\ell \in \{1,\dots,s\}.$$

3. Man definiert die Abbildung $T_0 \in \mathcal{K}(V;V)$ durch die Vorschrift

$$T_0 u = Tu + \textstyle\sum_{\ell=1}^{\min\{s,m\}} \langle f_\ell, u\rangle u_\ell \quad \text{für } u \in V,$$

wobei sich diese Abbildung von $T \in \mathcal{K}(V;V)$ nur durch einen Summanden mit endlichdimensionalem Bildraum unterscheidet. Nach dem Satz von Schauder folgt dann auch die Vollstetigkeit des adjungierten Operators $T_0^* \in \mathcal{K}(V^*;V^*)$.

Da für alle $u \in V$ und $f \in V^*$ die Identität

$$\langle f, T_0 u\rangle = \langle f, Tu\rangle + \textstyle\sum_{\ell=1}^{\min\{s,m\}} \langle f_\ell, u\rangle\langle f, u_\ell\rangle = \langle T^* f, u\rangle + \sum_{\ell=1}^{\min\{s,m\}} \langle f, u_\ell\rangle\langle f_\ell, u\rangle$$

gilt, hat der adjungierte Operator $T_0^* \in \mathcal{K}(V^*; V^*)$ die Gestalt

$$T_0^* f = T^* f + \textstyle\sum_{\ell=1}^{\min\{s,m\}} \langle f, u_\ell\rangle f_\ell \quad \text{für alle } f \in V^*.$$

Beide Fredholm-Operatoren $I - T_0 \in \mathcal{L}(V; V)$ und $I^* - T_0^* \in \mathcal{L}(V^*; V^*)$ haben nach dem Satz von Riesz den Index Null. Um einzusehen, daß $m = s$ gilt, wird von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß ein Fredholm-Operator vom Index Null genau dann injektiv ist, wenn er surjektiv ist:

4. Angenommen, es würde $m < s$ gelten. Dann bekäme man aufgrund der Definition von T_0 in Schritt 3 für ein beliebig fixiertes $v \in (I - T_0)^{-1}[\{0\}]$ stets

$$\begin{aligned} 0 = \langle g_k, (I - T_0)v\rangle &= \langle g_k, (I - T)v\rangle - \textstyle\sum_{\ell=1}^{m} \langle f_\ell, v\rangle\langle g_k, u_\ell\rangle \\ &= \langle (I^* - T^*)g_k, v\rangle - \textstyle\sum_{\ell=1}^{m} \langle f_\ell, v\rangle\langle g_k, u_\ell\rangle \end{aligned}$$

für alle $k \in \{1, \ldots, s\}$. Da $(I^* - T^*)g_k = 0$ sowie $\langle g_k, u_\ell\rangle = \delta_{k\ell}$ für alle $k, \ell \in \{1, \ldots, s\}$ aufgrund von Schritt 2 gilt, erhielte man $\langle f_k, v\rangle = 0$ für alle $k \in \{1, \ldots, m\}$, also $v = T_0 v = Tv$ und somit $v \in (I - T)^{-1}[\{0\}]$.

Da $\{v_1, \ldots, v_m\} \subset V$ eine Basis des Kerns $(I - T)^{-1}[\{0\}]$ ist, gäbe es Koordinaten $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ mit $v = \sum_{\ell=1}^{m} \alpha_\ell v_\ell$. Wegen $\langle f_k, v_\ell\rangle = \delta_{k\ell}$ für alle $k, \ell \in \{1, \ldots, m\}$ ergäbe sich somit

$$0 = \langle f_k, v\rangle = \textstyle\sum_{\ell=1}^{m} \alpha_\ell \langle f_k, v_\ell\rangle = \alpha_k \quad \text{für alle } k \in \{1, \ldots, m\},$$

also $v = 0$. Damit wäre der Operator $I - T_0 \in \mathcal{L}(V; V)$ injektiv, also auch surjektiv. Deshalb müßte es wegen $m < s$ ein $u \in V$ mit $(I - T_0)u = u_{m+1}$ geben, woraus sich

$$\begin{aligned} \langle g_{m+1}, u_{m+1}\rangle = \langle g_{m+1}, (I - T_0)u\rangle &= \langle g_{m+1}, (I - T)u\rangle - \textstyle\sum_{\ell=1}^{m} \langle f_\ell, u\rangle\langle g_{m+1}, u_\ell\rangle \\ &= \langle (I^* - T^*)g_{m+1}, u\rangle - \textstyle\sum_{\ell=1}^{m} \langle f_\ell, u\rangle\langle g_{m+1}, u_\ell\rangle = 0 \end{aligned}$$

wegen $(I^* - T^*)g_{m+1} = 0$ und $\langle g_{m+1}, u_\ell\rangle = 0$ für alle $\ell \in \{1, \ldots, m\}$ hinsichtlich Schritt 2 ergeben würde, was aber $\langle g_{m+1}, u_{m+1}\rangle = 1$ widerspräche. Somit ist die Annahme $m < s$ unhaltbar, und es gilt stattdessen $s \leq m$.

5. Angenommen, es würde $s < m$ gelten. Dann erhielte man wegen der Darstellung von T_0^* in Schritt 3 für ein willkürlich vorgegebenes $h \in (I^* - T_0^*)^{-1}[\{0\}]$ stets

$$\begin{aligned} 0 = \langle (I^* - T_0^*)h, v_k\rangle &= \langle (I^* - T^*)h, v_k\rangle - \textstyle\sum_{\ell=1}^{s} \langle h, u_\ell\rangle\langle f_\ell, v_k\rangle \\ &= \langle h, (I - T)v_k\rangle - \textstyle\sum_{\ell=1}^{s} \langle h, u_\ell\rangle\langle f_\ell, v_k\rangle \end{aligned}$$

für alle $k \in \{1, \ldots, m\}$. Da $(I - T)v_k = 0$ sowie $\langle f_\ell, v_k\rangle = \delta_{k\ell}$ für alle $k, \ell \in \{1, \ldots, m\}$ aufgrund von Schritt 2 gilt, bekäme man $\langle h, u_k\rangle = 0$ für alle $k \in \{1, \ldots, s\}$, also $h = T_0^* h = T^* h$ und damit $h \in (I^* - T^*)^{-1}[\{0\}]$.

Da $\{g_1,\ldots,g_s\} \subset V$ eine Basis des Kerns $(I^*-T^*)^{-1}[\{0\}]$ ist, gäbe es Koordinaten $\beta_1,\ldots,\beta_s \in \mathbb{K}$ mit $h = \sum_{\ell=1}^s \beta_\ell g_\ell$. Wegen $\langle g_\ell, u_k\rangle = \delta_{k\ell}$ für alle $k,\ \ell \in \{1,\ldots,s\}$ erhielte man demnach

$$0 = \langle h, u_k\rangle = \textstyle\sum_{\ell=1}^s \beta_\ell \langle g_\ell, u_k\rangle = \beta_k \quad \text{für alle } k \in \{1,\ldots,s\},$$

also $h = 0$. Damit wäre der Operator $I^* - T_0^* \in \mathcal{L}(V^*;V^*)$ injektiv, also auch surjektiv. Deswegen könnte man wegen $s < m$ ein $f \in V^*$ mit $(I^* - T_0^*)f = f_{s+1}$ finden, woraus sich die Beziehung

$$\begin{aligned}\langle f_{s+1}, v_{s+1}\rangle &= \langle (I^*-T_0^*)f, v_{s+1}\rangle = \langle (I^*-T^*)f, v_{s+1}\rangle - \textstyle\sum_{\ell=1}^s \langle f, u_\ell\rangle\langle f_\ell, v_{s+1}\rangle \\ &= \langle f, (I-T)v_{s+1}\rangle - \textstyle\sum_{\ell=1}^s \langle f, u_\ell\rangle\langle f_\ell, v_{s+1}\rangle = 0\end{aligned}$$

wegen $(I-T)v_{s+1} = 0$ und $\langle f_\ell, v_{s+1}\rangle = 0$ für alle $\ell \in \{1,\ldots,s\}$ im Hinblick auf Schritt 2 ergeben würde, was aber $\langle f_{s+1}, v_{s+1}\rangle = 1$ widerspräche. Somit war die Annahme $s < m$ falsch, es gilt also $m \leq s$, woraus mit Schritt 4 schließlich $m = s$ für den singulären Fall $m \geq 1$, $s \geq 1$ folgt.

6. Die Aussagen des Satzes über die exklusive Fredholm-Alternative zur Lösbarkeit der primalen und dualen Gleichungen erhält man durch die direkte Übertragung der Ergebnisse des Satzes von Riesz über den Fredholm-Index und des Dualitätssatzes von Schauder. $\square$