Vorlesung 28

Spektrum vollstetiger Operatoren

Resolventenmenge und Spektrum. Sei $(V, \| \ \|_V)$ ein Banach-Raum über $\mathbb{C}$ und $T \in \mathcal{L}(V; V)$ ein linearer stetiger Operator.

1. Man definiert die *Resolventenmenge* $\rho(T) \subset \mathbb{C}$ der regulären Werte von T durch

$$\rho(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - T)^{-1}[\{0\}] = \{0\},\ (\lambda I - T)[V] = V\right\}$$

und das *Spektrum* $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ als Menge der singulären Werte von T.

2. Für jedes $\lambda \in \rho(T)$ definiert man die *Resolvente* $T_\lambda = (\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(V; V)$.

3. Die Resolventenmenge $\rho(T)$ ist offen und das Spektrum $\sigma(T)$ kompakt in $\mathbb{C}$.

4. Die Menge $\left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|T\|\right\}$ ist stets Teilmenge der Resolventenmenge $\rho(T)$. Das Spektrum $\sigma(T)$ ist im Kreis $\left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\right\}$ enthalten.

Beweis. 1. Für jeden regulären Parameterwert $\lambda \in \rho(T)$ ist $\lambda I - T \in \mathcal{L}(V; V)$ bijektiv und somit nach dem Inversensatz von Banach ein Isomorphismus von V auf V. Nach dem Störungssatz für Isomorphismen ist für alle $\mu \in \mathbb{C}$ mit

$$|\mu - \lambda|\|(\lambda I - T)^{-1}\| = \|(\mu I - T) - (\lambda I - T)\|\|(\lambda I - T)^{-1}\| < 1$$

auch $\mu I - T \in \mathcal{L}(V; V)$ ein Isomorphismus von V auf V, also $\mu \in \rho(T)$ und somit $\rho(T)$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$.

2. Die Menge $\left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|T\|\right\}$ ist Teilmenge von $\rho(T)$, da $\lambda I - T \in \mathcal{L}(V; V)$ für $|\lambda| > \|T\|$ nach dem Störungssatz ein Isomorphismus von V auf V ist. □

Eigenwerte und Eigenräume. Sei $(V, \| \ \|_V)$ ein Banach-Raum über $\mathbb{C}$ sowie desweiteren $T \in \mathcal{L}(V; V)$ ein linearer stetiger Operator.

1. Man nennt einen singulären Wert $\lambda \in \sigma(T)$ *Eigenwert* von T, wenn der zugehörige Kern $(\lambda I - T)^{-1}[\{0\}]$ ein linearer Teilraum von V positiver Dimension ist.

2. In diesem Falle wird der Kern $(\lambda I - T)^{-1}[\{0\}] \subset V$ als der zum Eigenwert $\lambda \in \sigma(T)$ zugehörige *Eigenraum* bezeichnet.

Potenzreihenentwicklung der Resolvente. Ist $(V, \| \ \|_V)$ ein Banach-Raum über $\mathbb{C}$ und $T \in \mathcal{L}(V; V)$ ein linearer stetiger Operator, dann wird durch die Zuordnung $\lambda \in \rho(T) \mapsto T_\lambda \in \mathcal{L}(V; V)$ eine analytische operatorwertige Funktion definiert:

Für alle $\lambda \in \rho(T)$ und $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\mu - \lambda|\|T_\lambda\| < 1$ konvergiert die Potenzreihe $\{\sum_{\ell=0}^{k}(\mu - \lambda)^\ell T_\lambda^{\ell+1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $(\mathcal{L}(V; V), \| \ \|)$ gegen die Resolvente

$$T_\mu = \sum_{\ell=0}^{\infty}(\mu - \lambda)^\ell T_\lambda^{\ell+1} \in \mathcal{L}(V; V),$$

das heißt, es gilt $\left\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - \lambda|\|T_\lambda\| < 1\right\} \subset \rho(T)$.

Beweis. 1. Sei $\lambda \in \rho(T)$ vorgegeben. Da die Resolvente $T_\lambda \in \mathcal{L}(V;V)$ ein linearer stetiger Operator ist, konvergiert die Neumann-Reihe $\{\sum_{\ell=0}^{k}(\mu-\lambda)^\ell T_\lambda^\ell\}_{k\in\mathbb{N}}$ für alle $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\mu-\lambda|\|T_\lambda\| < 1$ im Raum $(\mathcal{L}(V;V), \|\ \|)$ gegen den Operator

$$(I-(\mu-\lambda)T_\lambda)^{-1} = \textstyle\sum_{\ell=0}^{\infty}(\mu-\lambda)^\ell T_\lambda^\ell \in \mathcal{L}(V;V).$$

2. Aus $\mu I - T = (\lambda I - T)(I-(\mu-\lambda)T_\lambda)$ folgt wegen der Invertierbarkeit von $\lambda I - T \in \mathcal{L}(V;V)$ und $I-(\mu-\lambda)T_\lambda \in \mathcal{L}(V;V)$ für $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\mu-\lambda|\|T_\lambda\| < 1$ auch die Invertierbarkeit von $\mu I - T \in \mathcal{L}(V;V)$ und somit $\mu \in \rho(T)$. Die Gleichung

$$(\mu I - T)^{-1} = (I-(\mu-\lambda)T_\lambda)^{-1}(\lambda I - T)^{-1}$$

liefert demnach

$$T_\mu = (I-(\mu-\lambda)T_\lambda)^{-1}T_\lambda = \textstyle\sum_{\ell=0}^{\infty}(\mu-\lambda)^\ell T_\lambda^{\ell+1} \in \mathcal{L}(V;V)$$

für jedes $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\mu-\lambda|\|T_\lambda\| < 1$ wegen Schritt 1, das heißt, die durch die Zuordnung $\lambda \in \rho(T) \mapsto T_\lambda \in \mathcal{L}(V;V)$ definierte Funktion kann für jedes $\lambda \in \rho(T)$ in der Umgebung $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu-\lambda|\|T_\lambda\| < 1\} \subset \rho(T)$ in eine absolut konvergente Potenzreihe mit Werten im Banach-Raum $(\mathcal{L}(V;V), \|\ \|)$ entwickelt werden. □

Spektralradius als Konvergenzradius. Sei $(V, \|\ \|_V)$ ein Banach-Raum über $\mathbb{C}$ und $T \in \mathcal{L}(V;V)$ ein linearer stetiger Operator. Dann gilt für den *Spektralradius* von T

$$\sup_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda| = \lim_{\ell\to\infty}\|T^\ell\|^{1/\ell}.$$

Beweis. 1. Erfüllt $\lambda \in \mathbb{C}$ die Bedingung $|\lambda| > \|T\|$, dann ist $\lambda I - T \in \mathcal{L}(V;V)$ ein Isomorphismus von V auf V, das heißt, es gilt $\lambda \in \rho(T)$. Daraus ergibt sich offenbar die Relation $|\lambda| \le \|T\|$ für alle $\lambda \in \sigma(T)$.

2. Da für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ und $m \in \mathbb{N}$ die Identität

$$\lambda^m I - T^m = (\lambda I - T)\textstyle\sum_{\ell=0}^{m-1}\lambda^{m-1-\ell}T^\ell = \sum_{\ell=0}^{m-1}\lambda^{m-1-\ell}T^\ell(\lambda I - T)$$

gilt, folgt aus $\lambda \in \sigma(T)$ stets $\lambda^m \in \sigma(T^m)$ sowie $|\lambda^m| \le \|T^m\|$ nach Schritt 1, also

$$|\lambda| \le \|T^m\|^{1/m} \le \|T\| \quad \text{für alle } \lambda \in \sigma(T), m \in \mathbb{N}$$

und somit $\sup_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda| \le \liminf_{m\to\infty}\|T^m\|^{1/m} \le \|T\|$.

3. Nach dem Satz über die Potenzreihenentwicklung der Resolvente ist die durch die Zuordnung $\lambda \in \rho(T) \mapsto T_\lambda \in \mathcal{L}(V;V)$ definierte operatorwertige Funktion analytisch auf $\rho(T)$, insbesondere auf $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| > \rho\}$ für Radien $\rho > \sup_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|$. Ist $S(r) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r\}$ die Kreislinie mit dem Radius $r > 0$, dann liefert der Integralsatz von Cauchy für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$\tfrac{1}{2\pi i}\textstyle\int_{S(\rho)}\lambda^{-m}T_\lambda\,d\lambda = \tfrac{1}{2\pi i}\int_{S(r)}\lambda^{-m}T_\lambda\,d\lambda \quad \text{für alle } r \ge \rho > \sup_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|.$$

Sei $r > \|T\|$ fixiert. Die Neumann-Reihe $\left\{\sum_{\ell=0}^{k} \lambda^{-\ell} T^{\ell}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert dann für jedes $\lambda \in S(r)$ absolut in $\mathcal{L}(V;V)$ gegen den Grenzwert

$$(I - \lambda^{-1}T)^{-1} = \textstyle\sum_{\ell=0}^{\infty} \lambda^{-\ell} T^{\ell} \in \mathcal{L}(V;V),$$

und damit auch die Potenzreihe $\left\{\sum_{\ell=0}^{k} \lambda^{-\ell-1} T^{\ell}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ für jedes $\lambda \in S(r)$ absolut in $\mathcal{L}(V;V)$ gegen die Resolvente

$$T_\lambda = (\lambda I - T)^{-1} = \lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}T)^{-1} = \textstyle\sum_{\ell=0}^{\infty} \lambda^{-\ell-1} T^{\ell} \in \mathcal{L}(V;V).$$

Somit ergibt sich für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ und $\rho \in \mathbb{R}$ mit $r \geq \rho > \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|$ die Identität

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2\pi i} \textstyle\int_{S(\rho)} \lambda^m T_\lambda \, d\lambda &= \tfrac{1}{2\pi i} \textstyle\int_{S(r)} \sum_{\ell=0}^{\infty} \lambda^{m-\ell-1}\, T^{\ell}\, d\lambda \\ &= \tfrac{1}{2\pi} \textstyle\sum_{\ell=0}^{\infty} r^{m-\ell} \int_0^{2\pi} e^{i(m-\ell)\varphi}\, d\varphi\, T^{\ell} = \sum_{\ell=0}^{\infty} r^{m-\ell} \delta_{m\ell} T^{\ell} = T^m,\end{aligned}$$

also

$$\|T^m\| = \tfrac{1}{2\pi} \left\| \textstyle\int_{S(\rho)} \lambda^m T_\lambda \, d\lambda \right\| \leq \rho^{m+1} \sup_{\lambda\in S(\rho)} \|T_\lambda\|.$$

Daraus folgt für alle $m \in \mathbb{N}$ und $\rho \in \mathbb{R}$ mit $r \geq \rho > \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|$ die Beziehung

$$\|T^m\|^{1/m} \leq \left(\rho \sup_{\lambda\in S(\rho)} \|T_\lambda\|\right)^{1/m} \rho \quad \text{und somit} \quad \limsup_{m\to\infty} \|T^m\|^{1/m} \leq \rho,$$

das heißt, $\limsup_{m\to\infty} \|T^m\|^{1/m} \leq \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|$. □

Spektralsatz von Riesz-Schauder über vollstetige Operatoren. Ist $(V, \|\ \|_V)$ ein Banach-Raum über $\mathbb{C}$ und $T \in \mathcal{K}(V;V)$ ein vollstetiger Operator, dann gilt:

1. Jeder singuläre Wert $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ ist ein Eigenwert von T.
2. Für jeden Radius $\rho > 0$ ist $\{\mu \in \sigma(T) : |\mu| \geq \rho\}$ eine endliche Menge.
3. Für $\lambda \in \sigma(T)$ und $\mu \in \sigma(T^*)$ mit $\lambda \neq \mu$ sowie $v \in (\lambda I - T)^{-1}[\{0\}]$ und $g \in (\mu I^* - T^*)^{-1}[\{0\}]$ gilt stets $\langle g, v\rangle = 0$.

Beweis. 1. Für $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ ist $\lambda I - T \in \mathcal{L}(V;V)$ nach dem Satz von Riesz ein Fredholm-Operator vom Index Null, dessen Kern $(\lambda I - T)^{-1}[\{0\}]$ eine positive endliche Dimension hat. Somit ist $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ ein Eigenwert von T.

2. Angenommen, es gäbe einen Radius $\rho > 0$, so daß in $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \geq \rho\}$ eine unendliche Menge von singulären Werten $\lambda \in \sigma(T)$ enthalten wäre. Dann könnte man eine unendliche Folge $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \sigma(T)$ paarweise verschiedener singulärer Werte mit $|\lambda_k| \geq \rho$ sowie eine Folge $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ zugehöriger Eigenvektoren mit $Tv_k = \lambda_k v_k$ und $v_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ auswählen.

Es soll induktiv gezeigt werden, daß die Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_k \in V$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ linear unabhängig wären. Offenbar träfe dies als Induktionsanfang für $k = 1$ zu. Wäre die Induktionsvoraussetzung für $k-1 \in \mathbb{N}$ erfüllt und würde man darüberhinaus annehmen, daß es $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{C}$ mit $v_k = \sum_{\ell=1}^{k-1} \alpha_\ell v_\ell$ gäbe, dann bekäme man wegen $Tv_\ell = \lambda_\ell v_\ell$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ zunächst

$$0 = Tv_k - \lambda_k v_k = \textstyle\sum_{\ell=1}^{k-1} \alpha_\ell (Tv_\ell - \lambda_k v_\ell) = \sum_{\ell=1}^{k-1} \alpha_\ell (\lambda_\ell - \lambda_k) v_\ell.$$

Man erhielte $\alpha_\ell(\lambda_\ell-\lambda_k)=0$ für alle $\ell\in\{1,\dots,k-1\}$ wegen der induktiven Voraussetzung der linearen Unabhängigkeit von $v_1,\dots,v_{k-1}\in V$ und damit auch $\alpha_\ell=0$ für alle $\ell\in\{1,\dots,k-1\}$ wegen $\lambda_\ell\neq\lambda_k$, was aber $v_k\neq 0$ widerspräche. Demnach wäre die zwischenzeitliche Annahme unhaltbar und die Induktionsbehauptung der linearen Unabhängigkeit von $v_1,\dots,v_k\in V$ richtig.

Somit könnte man eine aufsteigende Folge linearer Teilräume $V_k=\operatorname{lin}\{v_1,\dots v_k\}$ von V bilden Da für jedes $k\in\mathbb{N}, k\geq 2$ die Beziehungen $V_{k-1}\subset V_k$, $V_{k-1}\neq V_k$ sowie wegen $(\lambda_k I-T)v_k=0$ auch $(\lambda_k I-T)[V_k]\subset V_{k-1}$ gelten würden, könnte man durch Anwendung des Hilfssatzes von Riesz auf die Operatoren $\frac{1}{\lambda_k}T\in\mathcal{L}(V;V)$ eine Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset V$ finden, so daß $u_k\in V_k$, $u_k\neq V_{k-1}$ sowie $\|u_k\|_V=1$ und

$$\left\|T\left(\tfrac{u_k}{\lambda_k}\right)-T\left(\tfrac{v}{\lambda_k}\right)\right\|_V\geq\tfrac{1}{2}\quad\text{für alle } v\in V_{k-1} \text{ und } k\in\mathbb{N}, k\geq 2$$

und somit wegen $V_{k-1}\subset V_k$ auch

$$\left\|T\left(\tfrac{u_k}{\lambda_k}\right)-T\left(\tfrac{u_\ell}{\lambda_\ell}\right)\right\|_V\geq\tfrac{1}{2}\quad\text{für alle } k\in\mathbb{N}, k\geq 2 \text{ und } \ell\in\{1,\dots,k-1\}$$

gelten würde. Die Bildfolge $\left\{T\left(\frac{u_k}{\lambda_k}\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ hätte im Widerspruch zur Beschränktheit der Folge $\left\{\frac{u_k}{\lambda_k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ in V und der Vollstetigkeit von $T\in\mathcal{K}(V;V)$ keinen Häufungspunkt in V. Somit ist die ursprüngliche Annahme unhaltbar, das heißt, es liegen höchstens endlich viele singuläre Werte $\lambda\in\sigma(T)$ in $\{\mu\in\mathbb{C}:|\mu|\geq\rho\}$.

3. Für $\lambda\in\sigma(T)$ und $\mu\in\sigma(T^*)$ mit $\lambda\neq\mu$ sowie $v\in V$ mit $Tv=\lambda v$ und $g\in V^*$ mit $T^*g=\mu g$ folgt stets

$$\mu\langle g,v\rangle=\langle\mu g,v\rangle=\langle T^*g,v\rangle=\langle g,Tv\rangle=\langle g,\lambda v\rangle=\lambda\langle g,v\rangle$$

und somit $\langle g,v\rangle=0$ wegen $\lambda\neq\mu$. □

Geometrische und algebraische Eigenräume. Seien $(V,\|\ \|_V)$ ein Banach-Raum über $\mathbb{C}$, $T\in\mathcal{K}(V;V)$ ein vollstetiger Operator sowie $\lambda\in\sigma(T)\setminus\{0\}$ ein Eigenwert. Ist $r\in\mathbb{N}$ die Riesz-Zahl von $\frac{1}{\lambda}T\in\mathcal{K}(V;V)$, dann gelten die folgenden Aussagen:

1. Der *geometrische Eigenraum* $(\lambda I-T)^{-1}[\{0\}]$ ist ein linearer Teilraum des endlichdimensionalen *algebraischen Eigenraums* $N=[(\lambda I-T)^r]^{-1}[\{0\}]\subset V$.

2. Der Bildraum $F=(\lambda I-T)^r[V]$ ist ein abgeschlossener linearer Teilraum des abgeschlossenen Bildraums $(\lambda I-T)[V]$ von V.

3. Es gilt $(\lambda I-T)[N]\subset N$, und die Einschränkung $(\lambda I-T)|F:F\leftrightarrow F$ ist ein Isomorphismus.

4. Die Riesz-Zerlegung in die Summe $V=F+N$ ist topologisch direkt,

5. Die Projektoren $P\in\mathcal{L}(V;V)$ von V auf F sowie $Q\in\mathcal{L}(V;V)$ von V auf N liefern eine Zerlegung $T=A+B$ in vollstetige Summanden $A=TP\in\mathcal{K}(V;V)$ sowie $B=TQ\in\mathcal{K}(V;V)$ mit $A[V]\subset F$ und $B[V]\subset N$.

6. Der Operator $\lambda I-A:V\leftrightarrow V$ ist ein Isomorphismus.

Beweis. 1. Die ersten vier Aussagen sind eine direkte Anwendung des Satzes von Riesz über Fredholm-Operatoren vom Index Null auf den Operator $\frac{1}{\lambda}T \in \mathcal{K}(V;V)$.

2. Die Projektoren $P \in \mathcal{L}(V;V)$ von V auf F sowie $Q \in \mathcal{L}(V;V)$ von V auf N gestatten eine Zerlegung $T = A + B$ in vollstetige Summanden $A = TP \in \mathcal{K}(V;V)$ sowie $B = TQ \in \mathcal{K}(V;V)$, da die Summe $V = F + N$ ist topologisch direkt ist.

Die Darstellung $A = TP = \lambda P - (\lambda I - T)P$ liefert aufgrund von $P[V] = F$ und $(\lambda I - T)[F] = F$ in der Tat $A[V] \subset F$. Genauso folgt aus $B = \lambda Q - (\lambda I - T)Q$ wegen $Q[V] = N$ und $(\lambda I - T)[N] \subset N$ auch $B[V] \subset N$.

3. Da $A \in \mathcal{K}(V;V)$ nach Schritt 2 vollstetig und somit $\lambda I - A \in \mathcal{L}(V;V)$ nach dem Satz von Riesz ein Fredholm-Operator vom Index Null ist, genügt es, die Injektivität von $\lambda I - A$ zu zeigen, um einzusehen, daß $\lambda I - A : V \leftrightarrow V$ ein Isomorphismus ist:

Sei $v \in V$ mit $(\lambda I - A)v = 0$ vorgegeben. Die Zerlegung $v = Pv + Qv$ liefert

$$0 = (\lambda I - A)v = \lambda Pv + \lambda Qv - TPv = (\lambda I - T)Pv + \lambda Qv.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung in die topologisch direkte Summe $V = F + N$ ergibt sich aus $Pv \in F$, $(\lambda I - T)[F] = F$ sowie $Qv \in N$ sowohl $Qv = 0$ als auch $(\lambda I - T)Pv = 0$. Da $(\lambda I - T)|F : F \leftrightarrow F$ ein Isomorphismus ist, folgt daraus auch $Pv = 0$. Mit $Qv = 0$ ergibt sich schließlich $v = 0$, das heißt, $\lambda I - A$ ist injektiv. $\square$