Vorlesung 29

Hilbert-Räume

Unitäre Räume. Ein Paar $(V, (\ |\ ))$ heißt *unitärer Raum*, wenn auf einem linearen Raum V über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ein *Skalarprodukt* $(u, v) \in V \times V \mapsto (u|v) \in \mathbb{K}$ definiert ist, das heißt, für alle $u, v, w \in V$ und $\alpha, \kappa \in \mathbb{K}$ folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Positivität: Es gilt $(u|u) \geq 0$ sowie genau dann $(u|u) = 0$, wenn $u = 0$ ist.
2. Symmetrie: Es gilt $(u|v) = \overline{(v|u)}$.
3. Linearität: Es gilt $(u|\alpha v + \kappa w) = \alpha(u|v) + \kappa(u|w)$.
4. Konjugierte Linearität: Es gilt $(\alpha u + \kappa v|w) = \overline{\alpha}(u|w) + \overline{\kappa}(v|w)$.

Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Ist $(V, (\ |\ ))$ ein unitärer Raum über $\mathbb{K}$, dann gilt die Ungleichung $|(u|v)|^2 \leq (u|u)(v|v)$ für alle $u, v \in V$.

Beweis. Für alle $u, v \in V$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$0 \leq (u + \alpha v|u + \alpha v) = (u|u) + \overline{\alpha}(v|u) + \alpha(u|v) + \overline{\alpha}\alpha(v|v)$$

Im Falle $v \neq 0$ wählt man $\alpha = -\frac{(v|u)}{(v|v)} \in \mathbb{K}$ und damit $\overline{\alpha} = -\frac{(u|v)}{(v|v)} \in \mathbb{K}$. Man erhält

$$0 \leq (u|u) - \tfrac{(u|v)(v|u)}{(v|v)} - \tfrac{(u|v)(v|u)}{(v|v)} + \tfrac{(u|v)(v|u)}{(v|v)}$$

und demnach $|(u|v)|^2 \leq (u|u)(v|v)$ für alle $u, v \in V$. □

Hilbert-Räume. Sei $(V, (\ |\ ))$ ein unitärer Raum über $\mathbb{K}$.

1. Dann wird durch die Definition $u \in V \mapsto \|u\|_V = \sqrt{(u|u)} \in \mathbb{R}$ der Norm ein linearer normierter Raum $(V, \|\ \|_V)$ erzeugt.
2. Das Skalarprodukt $(u, v) \in V \times V \mapsto (u|v) \in \mathbb{K}$ ist eine stetige Abbildung.
3. Ein vollständiger unitärer Raum $(V, (\ |\ ))$ über $\mathbb{K}$ wird *Hilbert-Raum* genannt.

Beweis. 1. Für alle $u \in V$ gilt $\|u\|_V = \sqrt{(u|u)} \geq 0$ und genau dann $\|u\|_V = 0$, wenn $(u|u) = 0$, also $u = 0$ gilt. Desweiteren gilt für alle $u \in V$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ stets

$$\|\alpha u\|_V = \sqrt{(\alpha u|\alpha u)} = \sqrt{|\alpha|^2(u|u)} = |\alpha|\|u\|_V.$$

Ferner ergibt sich für alle $u, v \in V$ die Dreiecksungleichung aus

$$\begin{aligned}\|u + v\|_V^2 &= (u + v|u + v) = (u|u) + (u|v) + (v|u) + (v|v)\\ &\leq \|u\|_V^2 + 2\|u\|_V\|v\|_V + \|v\|_V^2 = (\|u\|_V + \|v\|_V)^2.\end{aligned}$$

2. Sind $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ und $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ zwei Folgen, die in V gegen die Grenzwerte $u \in V$ bzw. $v \in V$ konvergieren, dann ergibt sich aus der Abschätzung

$$\begin{aligned}|(u_k|v_k) - (u|v)| &\leq |(u_k - u|v_k - v)| + |(u|v_k - v)| + |(u_k - u|v)|\\ &\leq \|u_k - u\|_V\|v_k - v\|_V + \|u\|_V\|v_k - v\|_V + \|u_k - u\|_V\|v\|_V\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ die Stetigkeit $\lim_{k\to\infty} |(u_k|v_k) - (u|v)| = 0$. □

Orthogonalität. Sei $(V, (\ |\ ))$ ein unitärer Raum über $\mathbb{K}$.

1. Man nennt die Vektoren $u \in V$ und $v \in V$ *orthogonal*, wenn $(u|v) = 0$ gilt.

2. Für jeden linearen Teilraum $U \subset V$ definiert man den *zu U orthogonalen Teilraum* als abgeschlossenen linearen Teilraum

$$U^{\perp} = \bigl\{v \in V : (u|v) = 0 \text{ für alle } u \in U\bigr\} \subset V.$$

Orthogonale Projektion. Ist $(V, (\ |\ ))$ ein unitärer Raum über $\mathbb{K}$ und U ein vollständiger linearer Teilraum von V, dann gelten die folgenden Aussagen

1. Zu jedem $v \in V$ gibt es genau ein $u = P_U v \in U$ mit $\|u-v\|_V = \inf_{w\in U} \|w-v\|_V$.

2. Für jedes $v \in V$ gibt es genau ein $w \in U$ mit $v - w \in U^{\perp}$, wobei $w = P_U v$ gilt.

3. Der durch die Zuordnung $v \in V \mapsto P_U v \in U$ definierte Operator $P_U \in \mathcal{L}(V; V)$ wird *orthogonaler Projektor von V auf U* genannt.

4. Der Kern $P_U^{-1}[\{0\}] \subset V$ ist der zu U orthogonale lineare Teilraum $U^{\perp}$ von V.

5. Die Summe $V = U + U^{\perp}$ ist topologisch direkt.

6. Der lineare Teilraum U ist der zu $U^{\perp}$ orthogonale Teilraum von V.

Beweis. 1. Sei $v \in V$ beliebig fixiert und $\delta = \inf_{w\in U} \|w - v\|_V$. Man wählt eine Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset U$ mit $\lim_{k\to\infty} \|u_k - v\|_V = \delta$. Um einzusehen, daß $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset U$ eine Cauchy-Folge ist, liefert die Parallelogramm-Identität zunächst

$$\|u_k - u_\ell\|_V^2 = 2\bigl(\|u_k - v\|_V^2 + \|u_\ell - v\|_V^2\bigr) - 4\|v - \tfrac{1}{2}(u_k + u_\ell)\|_V^2$$

für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$. Wird $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, dann findet man einen Index $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|u_k - v\|_V^2 \le \delta^2 + \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}, k \ge k_0$. Da außerdem für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$ stets $\frac{1}{2}(u_k + u_\ell) \in U$ und somit $\|v - \frac{1}{2}(u_k + u_\ell)\|_V^2 \ge \delta^2$ gilt, liefert die Parallelogramm-Identität $\|u_k - u_\ell\|_V^2 \le 4\varepsilon$ für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$ mit $k, \ell \ge k_0$. Damit ist $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset U$ eine Cauchy-Folge im vollständigen linearen Teilraum $(U, \|\ \|_V)$ und konvergiert somit gegen einen Grenzwert $u \in U$, für den $\|u - v\|_V = \delta = \inf_{w\in U} \|w - v\|_V$ gilt.

Ist $\tilde{u} \in U$ ein weiterer Vektor, der die Minimaleigenschaft $\|\tilde{u} - v\|_V = \delta$ besitzt, dann liefert erneut die Parallelogramm-Identität

$$\|u - \tilde{u}\|_V^2 = 2\bigl(\|u - v\|_V^2 + \|\tilde{u} - v\|_V^2\bigr) - 4\|v - \tfrac{1}{2}(u + \tilde{u})\|_V^2.$$

Da $\|u - v\|_V^2 = \|\tilde{u} - v\|_V^2 = \delta^2$ gilt und wegen $\frac{1}{2}(u + \tilde{u}) \in U$ auch $\|v - \frac{1}{2}(u + \tilde{u})\|_V^2 \ge \delta^2$, ergibt sich daraus $\|u - \tilde{u}\|_V^2 \le 0$, also $\tilde{u} = u$, und somit die eindeutige Existenz des Minimalelements $u \in U$ mit $\|u - v\|_V = \inf_{w\in U} \|w - v\|_V$.

2. Für alle $w \in U$, $w \neq 0$ sowie für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ liefert Schritt 1

$$\delta^2 < \|v - (u + \alpha w)\|_V^2 = \|v - u\|_V^2 - \alpha(v - u|w) - \alpha(w|v - u) + \alpha^2\|w\|_V^2.$$

und somit wegen $\|v - u\|_V^2 = \delta^2$ auch

$$2\alpha \operatorname{Re}(u - v|w) + \alpha^2\|w\|_V^2 > 0 \quad \text{für alle } w \in U, w \neq 0 \text{ und } \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0.$$

Angenommen, es würde $\mathrm{Re}\,(u-v|w) \neq 0$ für ein $w \in U$, $w \neq 0$ gelten. Wählte man $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ mit $\mathrm{Re}\,(u-v|w) = -\alpha\|w\|_V^2$, so ergäbe sich der Widerspruch $-2\alpha^2\|w\|_V^2 + \alpha^2\|w\|_V^2 > 0$. Daraus folgt $\mathrm{Re}\,(u-v|w) = 0$ für alle $w \in U$.

Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ erhält man aus der letzten Ungleichung für $w = iz$ ebenso

$$-2\alpha\,\mathrm{Im}\,(u-v|z) + \alpha^2\|z\|_V^2 > 0 \quad \text{für alle } z \in U,\, z \neq 0 \text{ und } \alpha \in \mathbb{R},\, \alpha \neq 0.$$

Angenommen, es würde $\mathrm{Im}\,(u-v|z) \neq 0$ für ein $z \in U$, $z \neq 0$ zutreffen. Wählte man $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ mit $\mathrm{Im}\,(u-v|z) = \alpha\|z\|_V^2$, so erhielte man den Widerspruch $-2\alpha^2\|z\|_V^2 + \alpha^2\|z\|_V^2 > 0$. Daraus folgt $\mathrm{Im}\,(u-v|z) = 0$ für alle $z \in U$ und somit insgesamt in jedem Falle $(u-v|w) = 0$ für jedes $w \in U$, also $u - v \in U^\perp$.

Ist $\tilde{u} \in U$ ein weiterer Vektor mir $\tilde{u} - v \in U^\perp$, dann gilt für jedes $w \in U$ nach dem Satz von Pythagoras $\|v - (\tilde{u} + w)\|_V^2 = \|v - \tilde{u}\|_V^2 + \|w\|_V^2 \geq \|v - \tilde{u}\|_V^2$ und damit

$$\|v - \tilde{u}\|_V^2 \leq \inf_{w \in U} \|v - (\tilde{u} + w)\|_V^2 = \inf_{w \in U} \|v - w\|_V^2 = \|v - u\|_V^2$$

nach Schritt 1. Da $u \in U$ durch die Minimaleigenschaft $\inf_{w \in U} \|v - w\|_V^2 = \|v - u\|_V^2$ eindeutig bestimmt ist, folgt daraus $\tilde{u} = u$.

3. Die Charakterisierung von $P_U v \in U$ durch die Orthogonalität $v - P_U v \in U^\perp$ zeigt, daß $P_U : V \to V$ ein linearer Operator ist: Für alle $v, w \in V$ und $\alpha, \kappa \in \mathbb{K}$ gilt $v - P_U v \in U^\perp$ und $w - P_U w \in U^\perp$, also $(\alpha v + \kappa w) - (\alpha P_U v + \kappa P_U w) \in U^\perp$. Da außerdem auch $(\alpha v + \kappa w) - P_U(\alpha v + \kappa w) \in U^\perp$ gilt, ergibt sich die Linearität $P_U(\alpha v + \kappa w) = \alpha P_U v + \kappa P_U w$ aus Schritt 2. Desweiteren gilt für alle $v \in V$ wegen $P_U v \in U$ und $v - P_U v \in U^\perp$ nach dem Satz von Pythagoras

$$\|v\|_V^2 = \|P_U v\|_V^2 + \|v - P_U v\|_V^2 \geq \|P_U v\|_V^2,$$

das heißt, $P_U \in \mathcal{L}(V;V)$ ist ein linearer stetiger Operator.

4. Da für alle $v \in V$ nach Schritt 2 stets $v - P_U v \in U^\perp$ gilt, erhält man $v \in U^\perp$ für alle $v \in P_U^{-1}[\{0\}]$, also $P_U^{-1}[\{0\}] \subset U^\perp$. Gilt umgekehrt $v \in U^\perp$, dann folgt aus $v - P_U v \in U^\perp$ auch $P_U v \in U^\perp$ und somit $(P_U v|P_U v) = 0$ wegen $P_U v \in U$. Daraus ergibt sich $P_U v = 0$, also $v \in P_U^{-1}[\{0\}]$ und somit schließlich $P_U^{-1}[\{0\}] = U^\perp$.

5. Da man jedes $v \in V$ in $v = P_U v + (v - P_U v)$ mit $P_U v \in U$ und $v - P_U v \in U^\perp$ zerlegen kann, gilt $V = U + U^\perp$. Da sich für jedes $v \in U \cap U^\perp$ nach Definition $(v|v) = 0$ und somit $v = 0$ ergibt, ist die Summe $V = U + U^\perp$ algebraisch direkt. Die Stetigkeit des Projektors $P_U \in \mathcal{L}(V;V)$ von V auf U liefert auch die Stetigkeit des Projektors $I - P_U \in \mathcal{L}(V;V)$ von V auf $U^\perp$, das heißt, die Summe $V = U + U^\perp$ ist topologisch direkt.

6. Gilt $v \in U^{\perp\perp}$, so folgt aus $v - P_U v \in U^\perp$ zunächst $(v|v - P_U v) = 0$ und wegen $P_U v \in U$ auch $(v - P_U v|P_U v) = 0$, also insgesamt $(v - P_U v|v - P_U v) = 0$, das heißt, $v = P_U v \in U$ und somit $U^{\perp\perp} \subset U$. Umgekehrt folgt aus $v \in U$ stets $(w|v) = 0$ für alle $w \in U^\perp$, also auch $v \in U^{\perp\perp}$ und somit schließlich $U^{\perp\perp} = U$. □

Darstellungssatz von Riesz. 1. Sei $(V, (\ |\ ))$ ein unitärer Raum über $\mathbb{K}$. Setzt man

$$\langle \mathcal{D}u, v\rangle = (u|v) \quad \text{für } v \in V,$$

so wird für jedes $u \in V$ ein Funktional $\mathcal{D}u \in V^* = \mathcal{L}(V;\mathbb{K})$ mit der Eigenschaft

$$\|\mathcal{D}u\|_{V^*} = \|u\|_V \quad \text{für alle } u \in V$$

definiert. Die *Dualitätsabbildung* $\mathcal{D} : V \to V^*$ ist eine konjugiert-lineare Isometrie.

2. Ist $(V, (\ |\ ))$ ein Hilbert-Raum über $\mathbb{K}$, dann gibt es zu jedem $f \in V^*$ genau ein $u \in V$ mit $\mathcal{D}u = f$. Die Dualitätsabbildung $\mathcal{D} : V \leftrightarrow V^*$ ist ein konjugiert-linearer isometrischer Homöomorphismus, und es gilt

$$\|\mathcal{D}^{-1} f\|_V = \|f\|_{V^*} \quad \text{für alle } f \in V^*.$$

Die inverse Abbildung $\mathcal{D}^{-1} : V^* \leftrightarrow V$ wird als *Riesz-Abbildung* bezeichnet.

Beweis. 1. Wegen der Linearität der Zuordnung $v \in V \mapsto \langle \mathcal{D}u, v\rangle = (u|v) \in \mathbb{K}$ und der Abschätzung $|\langle \mathcal{D}u, v\rangle| = |(u|v)| \le \|u\|_V \|v\|_V$ für alle $v \in V$ gilt $\mathcal{D}u \in V^*$ sowie $\|\mathcal{D}u\|_{V^*} \le \|u\|_V$ für jedes $u \in V$. Für $u \in V$, $u \neq 0$ und $v = \frac{u}{\|u\|_V}$ folgt

$$\|u\| = (u|v) = \langle \mathcal{D}u, v\rangle \le \|\mathcal{D}u\|_{V^*} \le \|u\|_V$$

und somit $\|\mathcal{D}u\|_{V^*} = \|u\|_V$ für alle $u \in V$. Da für alle $u, v, w \in V$ und $\alpha, \kappa \in \mathbb{K}$

$$\langle \mathcal{D}(\alpha u + \kappa w), v\rangle = (\alpha u + \kappa w|v) = \overline{\alpha}(u|v) + \overline{\kappa}(w|v) = \langle \overline{\alpha}\mathcal{D}u + \overline{\kappa}\mathcal{D}w, v\rangle$$

gilt, ergibt sich die konjugierte Linearität von $\mathcal{D} : V \to V^*$.

2. Sei jetzt $(V, (\ |\ ))$ ein Hilbert-Raum über $\mathbb{K}$. Offenbar gilt $\mathcal{D}u = 0$ für $u = 0$. Außerdem folgt aus $u \in V$ mit $\|\mathcal{D}u\|_{V^*} = 0$ wegen $\|\mathcal{D}u\|_{V^*} = \|u\|_V$ stets $u = 0$.

Sei ein Funktional $f \in V^*$, $f \neq 0$ beliebig vorgegeben. Dann ist $U = f^{-1}[\{0\}]$ eine abgeschlossene Hyperebene und somit ein vollständiger linearer Teilraum des Hilbert-Raums V mit $\operatorname{codim} U = 1$. Damit ist das topologische Komplement $U^\perp$ von U in V ein linearer Teilraum von V mit $\dim U^\perp = 1$. Wird $w \in U^\perp$ mit $w \neq 0$ gewählt, dann gilt $(w|v) = 0$ für alle $v \in U$. Somit wird durch $g = \mathcal{D}w \in V^*$ ein Funktional mit $g^{-1}[\{0\}] = U$ definiert. Da sich die beiden Funktionale $f, g \in V^*$ wegen $f^{-1}[\{0\}] = g^{-1}[\{0\}] = U$ nur durch einen skalaren Faktor unterscheiden können, existiert ein $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$ mit $f = \overline{\alpha} g = \overline{\alpha}\mathcal{D}w = \mathcal{D}(\alpha w)$. Daraus folgt $\mathcal{D}u = f$ mit $u = \alpha w \in V$, $u \neq 0$, das heißt, $\mathcal{D} : V \to V^*$ ist surjektiv.

Ist $\tilde{u} \in V$ ein weiterer Vektor mit $\mathcal{D}\tilde{u} = f$, so ergibt sich

$$0 = \langle \mathcal{D}u - \mathcal{D}\tilde{u}, u - \tilde{u}\rangle = \langle \mathcal{D}(u - \tilde{u}), u - \tilde{u}\rangle = (u - \tilde{u}|u - \tilde{u}),$$

also $\tilde{u} = u$. Damit ist $\mathcal{D} : V \to V^*$ auch injektiv. Da somit $\|\mathcal{D}^{-1} f\|_V = \|f\|_{V^*}$ für alle $f \in V^*$ nach Schritt 1 gilt, ist $\mathcal{D} : V \leftrightarrow V^*$ ein Homöomorphismus. $\square$

Reflexivität von Hilbert-Räumen. Jeder Hilbert-Raum $(V, (\ |\ ))$ über $\mathbb{K}$ ist reflexiv.

Beweis. Sei $\mathcal{D} : V \leftrightarrow V^*$ die Dualitätsabbildung von V. Um zu zeigen, daß die natürliche Einbettung $J \in \mathcal{L}(V; V^{**})$ von V in den bidualen Raum V^{**} surjektiv ist, sei $h \in V^{**}$ beliebig vorgegeben. Dann wird durch

$$\langle f, u\rangle = \overline{\langle h, \mathcal{D}u\rangle} \quad \text{für } u \in V$$

ein lineares stetiges Funktional $f \in V^*$ definiert.

Setzt man $v = \mathcal{D}^{-1} f \in V$, dann gilt $\mathcal{D}v = f$ und somit

$$\langle h, \mathcal{D}u\rangle = \overline{\langle f, u\rangle} = \overline{\langle \mathcal{D}v, u\rangle} = \overline{(v|u)} = (u|v) = \langle \mathcal{D}u, v\rangle \quad \text{für alle } u \in V.$$

Wegen der Bijektivität der Dualitätsabbildung $\mathcal{D} : V \leftrightarrow V^*$ folgt aus der Definition der natürlichen Einbettung $J \in \mathcal{L}(V; V^{**})$ schließlich $Jv = h$ und somit deren Surjektivität, das heißt, die Reflexivität des Hilbert-Raums $(V, (\ |\ ))$. $\square$