Vorlesung 3

Kompakte Mengen

Kompakte Mengen. Sei $K \subset X$ eine Teilmenge eines metrischen Raums (X, ρ).

1. Man nennt $K \subset X$ *relativ kompakt*, wenn jede Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ wenigstens einen Häufungspunkt $u \in X$ besitzt.

2. Die Menge $K \subset X$ wird als *kompakt* bezeichnet, wenn sie relativ kompakt und abgeschlossen ist.

Bemerkung. Jede Teilmenge einer relativ kompakten Menge ist relativ kompakt. Ebenso ist jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge kompakt.

Vollständigkeit kompakter Räume. Jeder kompakte metrische Raum (X, ρ) ist vollständig, da jede Cauchy-Folge in X, die einen Häufungspunkt in X besitzt, auch gegen diesen Häufungspunkt konvergiert.

Präkompakte Mengen. Sei (X, ρ) ein metrischer Raum.

1. Ist $\varepsilon > 0$, so wird eine Menge $N \subset X$ als *ε-Netz für die Menge $K \subset X$* bezeichnet, wenn es zu jedem Punkt $u \in K$ einen Punkt $v \in N$ gibt, so daß $\rho(u, v) < \varepsilon$ gilt.

2. Man nennt eine Teilmenge $K \subset X$ *präkompakt*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein endliches ε-Netz für K gibt.

Beschränktheit präkompakter Mengen. Jede präkompakte Menge ist beschränkt, da die Vereinigung jeder endlichen Familie beschränkter Mengen beschränkt ist.

Kompaktheitskriterium von Hausdorff. Jede relative kompakte Teilmenge K eines metrischen Raums (X, ρ) ist präkompakt. Ist (X, ρ) vollständig, so folgt umgekehrt aus der Präkompaktheit einer Menge $K \subset X$ stets ihre relative Kompaktheit.

Beweis. 1. Seien $K \subset X$ relativ kompakt, $\varepsilon > 0$ und $u_1 \in K$ ein beliebiger Punkt. Für den Fall, daß $\rho(u_1, u) < \varepsilon$ für alle $u \in K$ gilt, ist bereits ein endliches ε-Netz für K konstruiert. Anderenfalls existiert ein Punkt $u_2 \in K$ mit $\rho(u_1, u_2) \geq \varepsilon$. Sollte für jeden Punkt $u \in K$ entweder $\rho(u_1, u) < \varepsilon$ oder $\rho(u_2, u) < \varepsilon$ gelten, so ist damit ein endliches ε-Netz für K gefunden. Im anderen Falle gibt es einen Punkt $u_3 \in K$ mit $\rho(u_1, u_3) \geq \varepsilon$ und $\rho(u_2, u_3) \geq \varepsilon$. Durch die Fortsetzung dieser Konstruktion erhält man Punkte $u_1, \ldots, u_m \in K$ mit der Eigenschaft, daß $\rho(u_k, u_\ell) \geq \varepsilon$ für alle k, $\ell \in \{1, \ldots, m\}$ mit $k \neq \ell$ gilt.

Wäre das Verfahren unbeschränkt fortsetzbar, so erhielte man eine Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in K, die wegen der Eigenschaft, daß $\rho(u_k, u_\ell) \geq \varepsilon$ für alle k, $\ell \in \mathbb{N}$ mit $k \neq \ell$ gelten würde, keinen Häufungspunkt in X enthalten könnte, was im Widerspruch zur relativen Kompaktheit von K stünde. Dies bedeutet, daß es eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ gibt, so daß das Verfahren nach dem m-ten Schritt abbricht. Somit ist für jedes $u \in K$ eine der Ungleichungen $\rho(u_k, u) < \varepsilon$ für ein $k \in \{1, \ldots, m\}$ erfüllt und damit ein endliches ε-Netz $\{u_1, \ldots, u_m\}$ für K gefunden.

2. Sei $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ vorgegeben und vorausgesetzt, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein endliches ε-Netz für K gibt. Man wählt eine Nullfolge $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ positiver Zahlen sowie zu jedem Index $k \in \mathbb{N}$ ein endliches ε_k-Netz $\{v_{k1}, \ldots, v_{km_k}\}$ für K. Da die Menge K von der endlichen Familie der Kugeln $B(v_{11}, \varepsilon_1), \ldots, B(v_{1m_1}, \varepsilon_1)$ überdeckt wird, liegt jeder Punkt aus K in einer dieser Kugeln. Aufgrund der endlichen Anzahl dieser Kugeln gibt es ein $k_1 \in \{1, \ldots, m_1\}$, so daß unendliche viele Glieder der Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ zur Kugel $B(v_{1k_1}, \varepsilon_1)$ gehören. Da die Menge K auch von der endlichen Familie der Kugeln $B(v_{21}, \varepsilon_2), \ldots, B(v_{2m_2}, \varepsilon_2)$ überdeckt wird, führt dieselbe Überlegung zu der Erkenntnis, daß es ein $k_2 \in \{1, \ldots, m_2\}$ gibt, für das unendlich viele Glieder der Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ in der Kugel $B(v_{2k_2}, \varepsilon_2)$ liegen und zugleich auch zur Kugel $B(v_{1k_1}, \varepsilon_1)$ gehören.

Setzt man dieses Verfahren fort, so erhält man eine Folge $\{B(v_{\ell k_\ell}, \varepsilon_\ell)\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset X$ von Kugeln mit der Eigenschaft, daß für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ im Durchschnitt $\cap_{i=1}^{\ell} B(v_{ik_i}, \varepsilon_i)$ unendlich viele Glieder der Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ liegen. Deshalb kann man eine wachsende Folge $\{k_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ finden, so daß die Teilfolge $\{u_{k_\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ von $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ die Beziehung $u_{k_\ell} \in \cap_{i=1}^{\ell} B(v_{ik_i}, \varepsilon_i)$ erfüllt.

Da zwei Folgeglieder u_{k_ℓ} und u_{k_i} für $\ell, i \in \mathbb{N}$, $\ell \leq i$ zur Kugel $B(v_{\ell k_\ell}, \varepsilon_\ell)$ gehören, gilt stets $\rho(u_{k_\ell}, u_{k_i}) < 2\varepsilon_\ell$, mit anderen Worten, die Teilfolge $\{u_{k_\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset K$ ist eine Cauchy-Folge. Ist (X, ρ) vollständig, so konvergiert diese Teilfolge gegen einen Grenzwert $u \in X$, das heißt, $K \subset X$ ist relativ kompakt. □

Folgerung aus dem Kompaktheitskriterium. Ist (X, ρ) ein vollständiger metrischer Raum und existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein relativ kompaktes ε-Netz für die Menge $K \subset X$, dann ist K relativ kompakt.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und $N \subset X$ ein relativ kompaktes $\frac{\varepsilon}{2}$-Netz für $K \subset X$. Dann gibt es aufgrund des Kompaktheitskriteriums von Hausdorff ein endliches $\frac{\varepsilon}{2}$-Netz $N_0 \subset X$ für N. Man kann also für jedes $u \in K$ ein $v \in N$ mit $\rho(u, v) < \frac{\varepsilon}{2}$ und für jedes $v \in N$ ein $v_0 \in N_0$ mit $\rho(v, v_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ finden. Folglich gibt es für jedes $u \in K$ ein $v_0 \in N_0$ mit $\rho(u, v_0) \leq \rho(u, v) + \rho(v, v_0) < \varepsilon$, das heißt, die Menge $N_0 \subset X$ ist ein endliches ε-Netz für K. Aufgrund der Vollständigkeit von X liefert eine erneute Anwendung des Kompaktheitskriteriums von Hausdorff die relative Kompaktheit von K. □

Separabilität kompakter Räume. Um einzusehen, daß jeder kompakte metrische Raum (X, ρ) separabel ist, wählt man eine Nullfolge $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ positiver Zahlen und zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein endliches ε_k-Netz $N_k = \{v_{k1}, \ldots, v_{km_k}\}$ für X. Dann gilt offenbar $X = \cup_{\ell=1}^{m_k} B(v_{k\ell}, \varepsilon_k)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, das heißt, die abzählbare Vereinigung $\cup_{k\in\mathbb{N}} N_k$ der endlichen Netze bildet eine in X dichte Menge.

Kompaktheit im Raum aller Zahlenfolgen. Sei K eine Teilmenge des Raumes s aller Zahlenfolgen und $K_\ell = \{x_\ell \in \mathbb{K} : \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in K\} \subset \mathbb{K}$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ die Menge der ℓ-ten Glieder der Folgen aus K. Die Menge K ist genau dann (relativ) kompakt in s, wenn K_ℓ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ (relativ) kompakt in $\mathbb{K}$ ist.

Beweis. 1. Sei K eine relativ kompakte Teilmenge von s. Angenommen, es gäbe eine Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ von Elementen $u_k = \{x_{k\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in K$, für die ein Index $\ell \in \mathbb{N}$ existieren würde, so daß die Folge $\{x_{k\ell}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K_\ell$ der ℓ-ten Folgeglieder keinen Häufungspunkt in $\mathbb{K}$ hätte. Dann könnte die Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ auch keinen Häufungspunkt in s besitzen, was der relativen Kompaktheit von K in s widerspräche.

2. Man wählt für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ ein $\ell_0 \in \mathbb{N}$ mit $2^{-\ell_0} < \varepsilon$ und betrachtet die Abbildung $T_0 : s \to s$, die jeder Folge $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in s$ die Folge $T_0 u = \{y_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in s$ mit $y_\ell = x_\ell$ für alle $\ell \in \{1, \ldots, \ell_0\}$ sowie $y_\ell = 0$ für alle $\ell > \ell_0$ zuordnet.

Ist $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen $v_k = \{y_{k\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in T_0[K]$, dann besitzt die Folge $\{y_{k\ell}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K_\ell$ der ℓ-ten Folgeglieder im Falle der relativen Kompaktheit von K_ℓ in $\mathbb{K}$ für jedes $\ell \in \{1, \ldots, \ell_0\}$ einen Häufungspunkt in $\mathbb{K}$. Somit kann man eine wachsende Folge $\{k_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ finden, so daß die Teilfolge $\{y_{k_m\ell}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset K_\ell$ für jedes $\ell \in \{1, \ldots, \ell_0\}$ in $\mathbb{K}$ konvergiert. Da außerdem $y_{k\ell} = 0$ für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$, $\ell > \ell_0$ gilt, konvergiert die Folge $\{v_{k_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ in s, das heißt, $T_0[K]$ ist relativ kompakt in s. Wegen

$$\rho(u, T_0 u) = \sum_{\ell=\ell_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^\ell} \frac{|x_\ell|}{1 + |x_\ell|} \leq \sum_{\ell=\ell_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^\ell} < \varepsilon \quad \text{für alle } u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in s$$

ist $T_0[K]$ ein relativ kompaktes ε-Netz für K. Damit ist K relativ kompakt in s. □

Durchschnitt absteigender Familien kompakter Mengen. Ist $\{K_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtleerer kompakter Teilmengen eines metrischen Raums (X, ρ), so daß $K_{k+1} \subset K_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt, so ist auch deren Durchschnitt $\cap_{k\in\mathbb{N}} K_k$ nicht leer und kompakt.

Beweis. Man wählt für jedes $k \in \mathbb{N}$ einen Punkt $u_k \in K_k$ und erhält eine Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K_1$. Da $K_1 \subset X$ kompakt ist, kann eine wachsende Teilfolge $\{k_\ell\} \subset \mathbb{N}$ gefunden werden, so daß die Teilfolge $\{u_{k_\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset K_1$ gegen einen Grenzwert $u \in K_1$ konvergiert. Führt man für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Indexmenge $N_m = \{\ell \in \mathbb{N} : k_\ell > m\}$ ein, dann konvergiert die Teilfolge $\{u_{k_\ell}\}_{\ell\in N_m} \subset K_m$ gegen den gleichen Grenzwert $u \in K_1$. Wegen der Abgeschlossenheit von $K_m \subset X$ ergibt sich $u \in K_m$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ und somit $u \in \cap_{m\in\mathbb{N}} K_m$. □

Kompaktheitskriterium von Alexandroff. Eine Teilmenge $K \subset X$ eines metrischen Raums (X, ρ) ist genau dann kompakt, wenn aus jeder offenen Überdeckung von K eine endliche Teilfamilie ausgewählt werden kann, die K überdeckt.

Beweis. 1. Sei $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ eine offene Überdeckung der kompakten Menge $K \subset X$ und $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Nullfolge positiver Zahlen. Dann existiert nach dem Kompaktheitskriterium von Hausdorff ein endliches ε_1-Netz $\{u_{11},\ldots,u_{1m_1}\}$ für K, woraus sich die Darstellung $K = \cup_{k=1}^{m_1} K_k$ als Vereinigung kompakter Teilmengen $K_k = K \cap K(u_{1k},\varepsilon_1)$ mit $\operatorname{diam}(K_k) \leq 2\varepsilon_1$ ergibt. Könnte man aus der offenen Überdeckung $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ von K keine endliche Teilfamilie herausgreifen, die K überdeckt, so müßte dasselbe auch für wenigstens eine Menge K_{k_1} mit $k_1 \in \{1,\ldots,m_1\}$ gelten. Genauso vorgehend könnte man eine kompakte Teilmenge $K_{k_1k_2}$ von K_{k_1} mit $\operatorname{diam}(K_{k_1k_2}) \leq 2\varepsilon_2$ auswählen, die von keiner endlichen Teilfamilie der offenen Überdeckung $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ überdeckt wird. So fortfahrend, erhielte man eine absteigende Folge $K_{k_1} \supset K_{k_1k_2} \supset \cdots \supset K_{k_1k_2\cdots k_\ell} \supset \cdots$ nichtleerer kompakter Teilmengen von K, so daß für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ die Menge $K_{k_1k_2\cdots k_\ell}$ von keiner endlichen Teilfamilie der offenen Überdeckung $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ überdeckt und $\operatorname{diam}(K_{k_1k_2\cdots k_\ell}) \leq 2\varepsilon_\ell$ gelten würde.

Da der Durchschnitt dieser absteigenden Familie nichtleerer kompakter Mengen nicht leer wäre, gäbe es einen Punkt $u_0 \in K$, der zu all diesen Mengen gehört. Da die Familie $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ eine offene Überdeckung von K ist, könnte man ein $\gamma_0 \in \Gamma$ wählen, so daß $u_0 \in G_{\gamma_0}$ gelten würde. Wegen der Offenheit von G_{γ_0} fände man ein $\varepsilon > 0$ mit $B(u_0,\varepsilon) \subset G_{\gamma_0}$. Wählte man $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{diam}(K_{k_1k_2\cdots k_\ell}) \leq 2\varepsilon_\ell < \varepsilon$, so erhielte man $u_0 \in K_{k_1k_2\cdots k_\ell} \subset B(u_0,\varepsilon) \subset G_{\gamma_0}$ im Widerspruch dazu, daß nach Konstruktion die Menge $K_{k_1k_2\cdots k_\ell}$ von keiner endlichen Teilfamilie der offenen Überdeckung $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ überdeckt werden sollte. Somit kann aus jeder offenen Überdeckung von K eine endliche Teilfamilie ausgewählt werden, die K überdeckt.

2. Sei vorausgesetzt, daß man aus jeder offenen Überdeckung der Menge $K \subset X$ eine endliche Teilfamilie auswählen kann, die K überdeckt.

Ist $E \subset K$ derart beschaffen, daß für jedes $v \in K$ ein $\varepsilon(v) > 0$ mit der Eigenschaft $B(v,\varepsilon(v)) \cap E \subset \{v\}$ existiert, dann bildet die Familie $\{B(v,\varepsilon(v))\}_{v\in K} \subset X$ von Kugeln eine offene Überdeckung von K, aus der man nach Voraussetzung eine endliche Teilfamilie $\{B(v_1,\varepsilon(v_1)),\ldots,B(v_m,\varepsilon(v_m))\}$ herausgreifen kann, welche die Mengen $K \supset E$ überdecken. Da $B(v_\ell,\varepsilon(v_\ell)) \cap E \subset \{v_\ell\}$ für jedes $\ell \in \{1,\ldots,m\}$ gilt, muß die Menge $E = \cup_{\ell=1}^{m}(B(v_\ell,\varepsilon(v_\ell)) \cap E) \subset \{v_1,\ldots,v_m\}$ endlich sein.

3. Sei $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ eine beliebige Folge. Sind nur endlich viele Glieder verschieden voneinander, dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß $u_{k_0} \in K$ Häufungspunkt der Folge ist. Anderenfalls besitzt die Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ unendlich viele verschiedene Glieder. Aufgrund von Schritt 2 gibt es einen Punkt $u \in K$, so daß $B(u,\varepsilon) \cap \{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \neq \varnothing$ für jedes $\varepsilon > 0$ gilt. Daraus folgt die Existenz einer wachsenden Teilfolge $\{k_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$, so daß $\rho(u_{k_\ell},u) \leq 2^{-\ell}$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ gilt. Somit ist $u \in K$ ein Häufungspunkt von $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$, also $K \subset X$ kompakt. $\square$

Topologische Eigenschaften kompakter Mengen. Die Vereinigung einer endlichen Anzahl sowie der Durchschnitt einer beliebigen Familie kompakter Teilmengen eines metrischen Raums (X, ρ) ist kompakt.

Beweis. 1. Sei $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset X$ eine offene Überdeckung der endlichen Vereinigung der kompakten Mengen $K_1, \ldots, K_m \subset X$. Dann wird aufgrund der Kompaktheitskriteriums von Alexandroff jede dieser kompakten Mengen K_ℓ von einer endlichen Teilfamilie von $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ überdeckt und somit auch die endliche Vereinigung $\cup_{\ell=1}^m K_\ell \subset X$. Demnach liefert die erneute Anwendung des Kompaktheitskriteriums von Alexandroff die Kompaktheit von $\cup_{\ell=1}^m K_\ell$.

2. Der Durchschnitt $\cap_{\gamma\in\Gamma} K_\gamma$ einer Familie $\{K_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ kompakter Teilmengen von X ist wegen der Abgeschlossenheit jeder kompakten Mengen K_γ eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge K_γ für ein $\gamma \in \Gamma$ und somit selbst kompakt. $\square$