Vorlesung 30

Orthonormalsysteme

Orthonormalsysteme. Sei $(V, (\ |\ ))$ ein unitärer Raum über $\mathbb{K}$.

1. Man nennt $\{v_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset V$ ein *Orthogonalsystem*, wenn $v_\gamma \neq 0$ sowie $(v_\gamma|v_\mu) = 0$ für alle $\gamma, \mu \in \Gamma$ mit $\gamma \neq \mu$ gilt.

2. Ein Orthogonalsystem $\{v_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset V$ heißt *Orthonormalsystem*, wenn die Bedingung $(v_\gamma|v_\mu) = \delta_{\gamma\mu}$ für alle $\gamma, \mu \in \Gamma$ erfüllt ist.

Hilbert-Folgenraum. 1. Auf der Menge ℓ^2 aller Zahlenfolgen $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$, für welche die Reihe $\big\{\sum_{\ell=1}^k |x_\ell|^2\big\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert, wird ein Skalarprodukt

$$(u|v) = \textstyle\sum_{\ell=1}^\infty \overline{x}_\ell y_\ell \quad \text{für } u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^2 \text{ und } v = \{y_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^2$$

definiert. Wegen der Vollständigkeit des mit der Norm $u \mapsto \|u\|_2 = \sqrt{(u|u)}$ ausgestatteteten Raumes $(\ell^2, \|\ \|_2)$ wird dadurch ein Hilbert-Raum $(\ell^2, (\ |\ ))$ erzeugt.

2. Definiert man für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Folge $e_k = \{\delta_{k\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, dann bildet $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \ell^2$ offenbar ein Orthonormalsystem.

3. Für jedes $v = \{y_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ konvergiert die Reihe $\big\{\sum_{\ell=1}^k y_\ell e_\ell\big\}_{k\in\mathbb{N}}$ absolut in ℓ^2 gegen $v \in \ell^2$, denn es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \Big\|v - \textstyle\sum_{\ell=1}^k y_\ell e_\ell\Big\|_V^2 = \lim_{k\to\infty} \Big\|\textstyle\sum_{\ell=k+1}^\infty y_\ell e_\ell\Big\|_V^2 = \lim_{k\to\infty} \textstyle\sum_{\ell=k+1}^\infty |y_\ell|^2 = 0.$$

Damit ist das Orthonormalsystem $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine totale Folge im Hilbert-Raum ℓ^2, woraus sich dessen Separabilität ergibt.

4. Ist $v = \{y_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ eine Folge, welche die Bedingung $(e_k|v) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt, dann folgt daraus stets $v = 0$, denn aus der Stetigkeit des Skalarprodukts und der absoluten Konvergenz der Reihe $\big\{\sum_{\ell=1}^k y_\ell e_\ell\big\}_{k\in\mathbb{N}}$ in ℓ^2 gegen v ergibt sich

$$0 = (e_k|v) = \Big(e_k\Big|\textstyle\sum_{\ell=1}^\infty y_\ell e_\ell\Big) = \textstyle\sum_{\ell=1}^\infty y_\ell(e_k|e_\ell) = \textstyle\sum_{\ell=1}^\infty y_\ell \delta_{k\ell} = y_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Konvergenzsatz in Hilbert-Räumen. Sei $(V, (\ |\ ))$ ein Hilbert-Raum über $\mathbb{K}$ und $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ ein Orthonormalsystem. Dann konvergiert die Reihe $\big\{\sum_{\ell=1}^k x_\ell v_\ell\big\}_{k\in\mathbb{N}}$ für jedes $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ absolut in V gegen den Grenzwert $\sum_{\ell=1}^\infty x_\ell v_\ell \in V$.

Beweis. Sei $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ vorgegeben. Dann konvergiert $\big\{\sum_{\ell=1}^k |x_\ell|^2\big\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gegen $\sum_{\ell=1}^\infty |x_\ell|^2$. Ferner gilt für alle $k, m \in \mathbb{N}$ mit $k > m$ stets

$$\begin{aligned}\Big\|\textstyle\sum_{\ell=1}^k x_\ell v_\ell - \sum_{\ell=1}^m x_\ell v_\ell\Big\|_V^2 &= \Big(\textstyle\sum_{\ell=m+1}^k x_\ell v_\ell\Big|\sum_{j=m+1}^k x_j v_j\Big)\\ &= \textstyle\sum_{\ell=m+1}^k \sum_{j=m+1}^k \overline{x}_\ell x_j (v_\ell|v_j) = \sum_{\ell=m+1}^k |x_\ell|^2.\end{aligned}$$

Damit ist $\big\{\sum_{\ell=1}^k x_\ell v_\ell\big\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge im Hilbert-Raum $(V, (\ |\ ))$ und konvergiert somit absolut in V gegen den Grenzwert $\sum_{\ell=1}^\infty x_\ell v_\ell \in V$. □

Approximation in abgeschlossenen Teilräumen. Sei $(V, (\ |\ ))$ ein Hilbert-Raum über $\mathbb{K}$ und $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ ein Orthonormalsystem. Bildet man die endlichdimensionalen Teilräume $U_k = \operatorname{lin}\{v_1, \dots v_k\}$ für $k \in \mathbb{N}$ sowie den abgeschlossenen linearen Teilraum $U = \operatorname{cl}\operatorname{lin}\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ von V, dann gelten die folgenden Aussagen:

1. Für alle $v \in V$, $k \in \mathbb{N}$ ist die Projektion $P_{U_k} v = \sum_{\ell=1}^k (v_\ell|v)v_\ell \in U_k$ die eindeutige Lösung des Minimumproblems $\|P_{U_k} v - v\|_V = \inf_{w\in U_k} \|w - v\|_V$, wobei

$$\|P_{U_k} v\|_V^2 = \textstyle\sum_{\ell=1}^k |(v_\ell|v)|^2 \leq \|v\|_V^2.$$

2. Die Reihe $\big\{\sum_{\ell=1}^k (v_\ell|v)v_\ell\big\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert in U absolut für jedes $v \in V$ gegen den Grenzwert $P_U v = \sum_{\ell=1}^\infty (v_\ell|v)v_\ell \in U$, und es gilt

$$\|P_U v\|_V^2 = \textstyle\sum_{\ell=1}^\infty |(v_\ell|v)|^2 \leq \|v\|_V^2.$$

3. Ist das Orthonormalsystem $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ total, das heißt, gilt $V = \operatorname{cl}\operatorname{lin}\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, dann wird $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ als *Orthonormalbasis* bezeichnet. Die Reihe $\big\{\sum_{\ell=1}^k (v_\ell|v)v_\ell\big\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert dann in V für jedes $v \in V$ absolut gegen $v = \sum_{\ell=1}^\infty (v_\ell|v)v_\ell$, wobei

$$\|v\|_V^2 = \textstyle\sum_{\ell=1}^\infty |(v_\ell|v)|^2.$$

4. Ein Orthonormalsystem $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ ist genau dann eine Orthonormalbasis, wenn $v = 0$ der einzige Vektor in V ist, welcher die Bedingung $(v_\ell|v) = 0$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Beweis. 1. Für alle $v \in V$, $k \in \mathbb{N}$ und $\beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{K}$ wird das Normquadrat

$$\begin{aligned}
\Big\|v - \textstyle\sum_{\ell=1}^k \beta_\ell v_\ell\Big\|_V^2 &= \|v\|_V^2 - \textstyle\sum_{\ell=1}^k \big(\overline{\beta}_\ell (v_\ell|v) + \beta_\ell \overline{(v_\ell|v)} - \overline{\beta}_\ell \beta_\ell\big) \\
&= \|v\|_V^2 + \textstyle\sum_{\ell=1}^k \big(\overline{\beta}_\ell - \overline{(v_\ell|v)}\big)\big(\beta_\ell - (v_\ell|v)\big) - \sum_{\ell=1}^k \overline{(v_\ell|v)}(v_\ell|v) \\
&= \|v\|_V^2 - \textstyle\sum_{\ell=1}^k |(v_\ell|v)|^2 + \sum_{\ell=1}^k |\beta_\ell - (v_\ell|v)|^2
\end{aligned}$$

genau dann minimal, wenn $\beta_\ell = (v_\ell|v)$ für alle $\ell \in \{1, \dots, k\}$ gilt. Somit liefert der Satz über die Orthogonalprojektion die Darstellung $P_{U_k} v = \sum_{\ell=1}^k (v_\ell|v)v_\ell \in U_k$ und

$$\textstyle\sum_{\ell=1}^k |(v_\ell|v)|^2 + \Big\|v - \sum_{\ell=1}^k (v_\ell|v)v_\ell\Big\|_V^2 = \|P_{U_k} v\|_V^2 + \|v - P_{U_k} v\|_V^2 = \|v\|_V^2.$$

Damit gehört die Folge $\{(v_\ell|v)\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ für alle $v \in V$ zum Folgenraum ℓ^2. Der Konvergenzsatz im Hilbert-Raum V liefert somit für jedes $v \in V$ die absolute Konvergenz der Reihe $\big\{\sum_{\ell=1}^k (v_\ell|v)v_\ell\big\}_{k\in\mathbb{N}}$ in U gegen den Grenzwert $\sum_{\ell=1}^\infty (v_\ell|v)v_\ell \in U$.

2. Seien $v \in V$ sowie $w \in U = \operatorname{cl}\operatorname{lin}\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es eine Folge $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{lin}\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} \|w_k - w\|_V = 0$. Somit existieren eine wachsende Folge $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ sowie Skalare $\{\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{km_k}\} \subset \mathbb{K}$, so daß für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Darstellung $w_k = \sum_{\ell=1}^{m_k} \alpha_{k\ell} v_\ell \in U_{m_k}$ gilt. Nach dem Satz über die Orthogonalprojektion gilt außerdem $v - P_{U_{m_k}} v \in U_{m_k}^\perp$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und somit

$$\big(v - \textstyle\sum_{\ell=1}^{m_k} (v_\ell|v)v_\ell \big| w_k\big) = \big(v - P_{U_{m_k}} v \big| w_k\big) = 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Da die Reihe $\{\sum_{\ell=1}^{m_k}(v_\ell|v)v_\ell\}_{k\in\mathbb{N}}$ in U gegen den Grenzwert $\sum_{\ell=1}^{\infty}(v_\ell|v)v_\ell \in U$ konvergiert, folgt wegen $\lim_{k\to\infty}\|w_k - w\|_V = 0$ und der Stetigkeit des Skalarprodukts

$$\big(v - \textstyle\sum_{\ell=1}^{\infty}(v_\ell|v)v_\ell\big|w\big) = 0,$$

also $v - \sum_{\ell=1}^{\infty}(v_\ell|v)v_\ell \in U^\perp$, da $w \in U$ willkürlich vorgegeben wurde. Der Satz über die Orthogonalprojektion liefert $P_U v = \sum_{\ell=1}^{\infty}(v_\ell|v)v_\ell \in U$ für alle $v \in V$ sowie

$$\textstyle\sum_{\ell=1}^{\infty}|(v_\ell|v)|^2 + \big\|v - \sum_{\ell=1}^{\infty}(v_\ell|v)v_\ell\big\|_V^2 = \|P_U v\|_V^2 + \|v - P_U v\|_V^2 = \|v\|_V^2.$$

3. Sei $w = 0$ der einzige Vektor in V, welcher die Bedingung $(v_\ell|w) = 0$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ erfüllt. Da die Reihe $\{\sum_{\ell=1}^{k}(v_\ell|v)v_\ell\}_{k\in\mathbb{N}}$ in U für jedes $v \in V$ absolut gegen den Grenzwert $P_U v = \sum_{\ell=1}^{\infty}(v_\ell|v)v_\ell \in U$ konvergiert, gilt wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts für alle $v \in V$, $m \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$(v_m|v - P_U v) = \lim_{k\to\infty}\big(v_m\big|v - \textstyle\sum_{\ell=1}^{k}(v_\ell|v)v_\ell\big) = (v_m|v) - \sum_{\ell=1}^{\infty}(v_\ell|v)(v_m|v_\ell) = 0.$$

Die obige Bedingung liefert $v = P_U v \in U$ für alle $v \in V$ und somit $U = V$.

Ist umgekehrt $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ eine Orthonormalbasis, dann gilt $V = \operatorname{cl}\operatorname{lin}\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ und demnach $v = \sum_{\ell=1}^{\infty}(v_\ell|v)v_\ell$ für alle $v \in V$ wegen Schritt 2. Erfüllt $v \in V$ die Bedingung $(v_\ell|v) = 0$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$, dann folgt daraus schließlich $v = 0$. □

Separabilität von Hilbert-Räumen. 1. Ein unendlichdimensionaler Hilbert-Raum $(V, (\ |\ ))$ ist genau dann separabel, wenn es eine Orthonormalbasis $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ gibt.

2. Hat der Hilbert-Raum $(V, (\ |\ ))$ über $\mathbb{K}$ eine Orthonormalbasis $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$, dann sind die beiden Hilbert-Räume V und ℓ^2 isometrisch isomorph.

Beweis. 1. Ist der unendlichdimensionale Hilbert-Raum $(V, (\ |\ ))$ separabel, dann gibt es eine totale Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ linear unabhängiger Vektoren, es gilt also $V = \operatorname{cl}\operatorname{lin}\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Man setzt $V_0 = \{0\}$, bildet für jedes $k \in \mathbb{N}$ den k-dimensionalen Teilraum $V_k = \operatorname{lin}\{u_1, \ldots, u_k\}$ von V und definiert $w_k = u_k - P_{V_{k-1}}u_k$ für $k \in \mathbb{N}$.

Es soll induktiv bewiesen werden, daß $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ ein totales Orthogonalsystem ist, welches für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Eigenschaft $V_k = \operatorname{lin}\{w_1, \ldots, w_k\}$ besitzt: Der Induktionsanfang für $k = 1$ liefert $w_1 = u_1 \neq 0$.

Unter der induktiven Voraussetzung, daß $\{w_1, \ldots, w_{k-1}\}$ ein Orthogonalsystem mit $V_{k-1} = \operatorname{lin}\{w_1, \ldots, w_{k-1}\}$ ist, folgt $w_k = u_k - P_{V_{k-1}}u_k \in V_{k-1}^\perp$ aus den Eigenschaften des Projektors $P_{V_{k-1}} \in \mathcal{L}(V; V)$ von V auf V_{k-1}, also $(w_\ell|w_m) = 0$ für alle $\ell, m \in \{1, \ldots, k\}$ mit $\ell \neq m$. Da nach Induktionsvoraussetzung $u_k \notin V_{k-1}$ gilt, erhält man $w_k = u_k - P_{V_{k-1}}u_k \neq 0$, das heißt, $\{w_1, \ldots, w_k\}$ ist ein Orthogonalsystem.

Desweiteren gilt $u_k - w_k = P_{V_{k-1}}u_k \in V_{k-1}$, woraus sich nach Induktionsvoraussetzung $\operatorname{lin}\{w_1, \ldots, w_{k-1}, w_k\} = \operatorname{lin}\{u_1, \ldots, u_{k-1}, w_k\} = \operatorname{lin}\{u_1, \ldots, u_{k-1}, u_k\} = V_k$ ergibt und somit auch $\operatorname{lin}\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \operatorname{lin}\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Damit ist $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ ein totales Orthogonalsystem, dessen Normierung eine Orthonormalbasis liefert.

2. Ist $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ eine Orthonormalbasis, dann ist $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine totale Folge im Hilbert-Raum V, woraus dessen Separabilität folgt.

Durch die Zuordnung $u \in V \mapsto Tu = \{(v_\ell|u)\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ wird eine lineare Abbildung $T : V \to \ell^2$ definiert und der Approximationssatz liefert

$$\|u\|_V^2 = \sum_{\ell=1}^{\infty} |(v_\ell|u)|^2 = \|Tu\|_2^2 \quad \text{für alle } u \in V.$$

Damit ist die lineare stetige Abbildung $T \in \mathcal{L}(V;\ell^2)$ injektiv.

Wird $w = \{y_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ vorgegeben, dann konvergiert die Reihe $\left\{\sum_{\ell=1}^{k} y_\ell v_\ell\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ nach dem Konvergenzsatz in V gegen einen Grenzwert $u = \sum_{\ell=1}^{\infty} y_\ell v_\ell \in V$. Da $\{v_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset V$ eine Orthonormalbasis ist, ergibt sich $y_\ell = (v_\ell|u)$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ und somit $Tu = w$. Damit ist die Abbildung $T \in \mathcal{L}(V;\ell^2)$ auch surjektiv, also bijektiv.

Für alle $u, w \in V$ gilt die Identität

$$\begin{aligned}(u|w) &= \left(\sum_{\ell=1}^{\infty}(v_\ell|u)v_\ell \,\middle|\, \sum_{m=1}^{\infty}(v_m|w)v_m\right)\\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\overline{(v_\ell|u)}(v_m|w)(v_\ell|v_m) = \sum_{\ell=1}^{\infty}\overline{(v_\ell|u)}(v_m|w) = (Tu|Tw),\end{aligned}$$

das heißt, $T : V \leftrightarrow \ell^2$ besitzt die geometrische Isometrieeigenschaft. $\square$