

Transponierte Abbildungen

Transponierte Abbildungen. Seien $(V, (\cdot | \cdot)_V)$, $(W, (\cdot | \cdot)_W)$ Hilbert-Räume über $\mathbb{C}$ sowie $\mathcal{D}_V : V \leftrightarrow V^*$ und $\mathcal{D}_W : W \leftrightarrow W^*$ die entsprechenden Dualitätsabbildungen.

1. Man definiert die zu $T \in \mathcal{L}(V; W)$ *transponierte Abbildung* $T^\top = \mathcal{D}_V^{-1} T^* \mathcal{D}_W \in \mathcal{L}(W; V)$ mit Hilfe der adjungierten Abbildung $T^* \in \mathcal{L}(W^*; V^*)$.

2. Für alle $T \in \mathcal{L}(V; W)$ und $v \in V$, $w \in W$ gilt die Identität

$$(T^\top w | v) = \langle \mathcal{D}_V T^\top w, v \rangle = \langle T^* \mathcal{D}_W w, v \rangle = \langle \mathcal{D}_W w, T v \rangle = (w | T v).$$

3. Für alle $T, A \in \mathcal{L}(V; W)$, $\alpha, \kappa \in \mathbb{C}$ gilt $(\alpha T + \kappa A)^\top = \bar{\alpha} T^\top + \bar{\kappa} A^\top$ wegen

$$\begin{aligned} ((\alpha T + \kappa A)^\top w | v) &= (w | (\alpha T + \kappa A) v) = \alpha (w | T v) + \kappa (w | A v) \\ &= \alpha (T^\top w | v) + \kappa (A^\top w | v) = ((\bar{\alpha} T^\top + \bar{\kappa} A^\top) w | v) \end{aligned}$$

für alle $v \in V$, $w \in W$.

4. Für jedes $T \in \mathcal{L}(V; W)$ gilt $T^{\top\top} = T$ wegen

$$(w | T v) = (T^\top w | v) = \overline{(v | T^\top w)} = \overline{(T^{\top\top} v | w)} = (w | T^{\top\top} v) \quad \text{für alle } v \in V, w \in W.$$

5. Ist $(X, (\cdot | \cdot)_X)$ ein weiterer Hilbert-Raum über $\mathbb{C}$, dann gilt für die Verkettung $(AT)^\top = T^\top A^\top \in \mathcal{L}(X; V)$ für alle $T \in \mathcal{L}(V; W)$, $A \in \mathcal{L}(W; X)$ aufgrund von

$$((AT)^\top x | v) = (x | AT v) = (A^\top x | T v) = (T^\top A^\top x | v) \quad \text{für alle } v \in W, x \in X.$$

Normale und hermitesche Operatoren. Sei $(V, (\cdot | \cdot))$ ein Hilbert-Raum über $\mathbb{C}$.

1. Ein linearer stetiger Operator $T \in \mathcal{L}(V; V)$ mit der Eigenschaft $T^\top T = T T^\top$ wird als *normal* bezeichnet.

2. Gilt sogar $T = T^\top$, so nennt man $T \in \mathcal{L}(V; V)$ einen *hermiteschen* Operator.

3. Jeder lineare stetige Operator $T \in \mathcal{L}(V; V)$ kann in der Form $T = T_1 + i T_2$ mit den *hermiteschen Komponenten*

$$T_1 = \frac{1}{2}(T + T^\top) \in \mathcal{L}(V; V) \quad \text{und} \quad T_2 = \frac{1}{2i}(T - T^\top) \in \mathcal{L}(V; V)$$

des Operators T dargestellt werden. Offenbar gilt dann $T^\top = T_1 - i T_2$.

Normalitätskriterium. Sei $(V, (\cdot | \cdot))$ ein Hilbert-Raum über $\mathbb{C}$ und $T \in \mathcal{L}(V; V)$ ein linearer stetiger Operator. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. T ist normal.

2. Es gilt $T_1 T_2 = T_2 T_1$ für die hermiteschen Komponenten

$$T_1 = \frac{1}{2}(T + T^\top) \in \mathcal{L}(V; V) \quad \text{und} \quad T_2 = \frac{1}{2i}(T - T^\top) \in \mathcal{L}(V; V).$$

3. Es gilt die Normidentität $\|Tu\| = \|T^\top u\|$ für alle $u \in V$.

Beweis. 1. Ist $T \in \mathcal{L}(V; V)$ normal, so ergibt sich für die hermiteschen Komponenten

$$\begin{aligned} T_1 T_2 &= \frac{1}{4i}(T + T^\top)(T - T^\top) = \frac{1}{4i}(T T - T^\top T^\top) + \frac{1}{4i}(T^\top T - T T^\top) \\ &= \frac{1}{4i}(T T - T^\top T^\top) - \frac{1}{4i}(T^\top T - T T^\top) = \frac{1}{4i}(T - T^\top)(T + T^\top) = T_2 T_1. \end{aligned}$$

2. Gilt $T_1 T_2 = T_2 T_1$ für die hermiteschen Komponenten T_1, T_2 von T , so folgt

$$\begin{aligned} T^\top T &= (T_1 - iT_2)(T_1 + iT_2) = (T_1 T_1 + T_2 T_2) - i(T_2 T_1 - T_1 T_2) \\ &= (T_1 T_1 + T_2 T_2) + i(T_2 T_1 - T_1 T_2) = (T_1 + iT_2)(T_1 - iT_2) = T T^\top. \end{aligned}$$

3. Ist $T \in \mathcal{L}(V; V)$ normal, so folgt für alle $u \in V$ die Identität

$$\|Tu\|^2 = (Tu|Tu) = (T^\top Tu|u) = (T T^\top u|u) = (T^\top u|T^\top u) = \|T^\top u\|^2.$$

4. Ist umgekehrt $T \in \mathcal{L}(V; V)$ ein Operator, so daß $\|Tu\| = \|T^\top u\|$ für jedes $u \in V$ erfüllt ist, dann ergibt sich offenbar

$$\begin{aligned} 4(Tu|Tv) &= \|T(u+v)\|^2 - \|T(u-v)\|^2 - i\|T(u+iv)\|^2 + i\|T(u-iv)\|^2 \\ &= \|T^\top(u+v)\|^2 - \|T^\top(u-v)\|^2 - i\|T^\top(u+iv)\|^2 + i\|T^\top(u-iv)\|^2 \\ &= 4(T^\top u|T^\top v), \end{aligned}$$

also $(T^\top Tu|v) = (T T^\top u|v)$ für alle $u, v \in V$ und somit $T^\top T = T T^\top$. $\square$

Orthogonalität verschiedener Eigenräume. Sei $(V, (\cdot|\cdot))$ ein Hilbert-Raum über $\mathbb{C}$ und $T \in \mathcal{L}(V; V)$ normal. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. Für die Kerne gilt $T^{-1}[\{0\}] = (T^\top)^{-1}[\{0\}]$.
2. Ist $Tu = \mu u$ für ein Paar $(\mu, u) \in \mathbb{C} \times V$, so folgt $T^\top u = \bar{\mu}u$.
3. Sind $(\lambda, v), (\mu, u) \in \mathbb{C} \times V$ zwei Paare mit $Tv = \lambda v$ und $Tu = \mu u$, dann folgt aus $\lambda \neq \mu$ stets $(u|v) = 0$.

Beweis. 1. Aufgrund des obigen Normalitätskriteriums gilt genau dann $\|Tu\| = 0$ für ein $u \in V$, wenn $\|T^\top u\| = 0$ ist. Daraus folgt $T^{-1}[\{0\}] = (T^\top)^{-1}[\{0\}]$.

2. Sei $(\mu, u) \in \mathbb{C} \times V$ ein Paar mit $Tu = \mu u$. Da mit T auch $\mu I - T \in \mathcal{L}(V; V)$ normal ist sowie $(\mu I - T)^\top = \bar{\mu}I - T^\top$ gilt, ergibt sich die Beziehung

$$(\mu I - T)^{-1}[\{0\}] = (\bar{\mu}I - T^\top)^{-1}[\{0\}].$$

Daher folgt aus $Tu = \mu u$ stets $T^\top u = \bar{\mu}u$.

3. Sind $(\lambda, v), (\mu, u) \in \mathbb{C} \times V$ zwei Paare mit $Tv = \lambda v$ und $Tu = \mu u$, dann gilt $T^\top u = \bar{\mu}u$ und somit

$$\lambda(u|v) = (u|\lambda v) = (u|Tv) = (T^\top u|v) = (\bar{\mu}u|v) = \mu(u|v),$$

woraus sich im Falle $\lambda \neq \mu$ schließlich $(u|v) = 0$ ergibt. $\square$

Spektralradius normaler Operatoren. Sei $(V, (\cdot | \cdot))$ ein Hilbert-Raum über $\mathbb{C}$. Ist $T \in \mathcal{L}(V; V)$ normal, so gilt für den Spektralradius $\sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = \|T\|$.

Beweis. 1. Sei $T \in \mathcal{L}(V; V)$ ein nichttrivialer normaler Operator. Nach dem Satz über den Spektralradius gilt $\sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|T^m\|^{1/m} \leq \|T\|$. Es genügt also, (induktiv) zu beweisen, daß $\|T\|^m \leq \|T^m\|$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

2. Im Falle $m = 1$ ist diese Aussage trivial. Für alle $m \in \mathbb{N}$ und $u \in V$ gilt offenbar

$$\|T^m u\|^2 = (T^\top T^m u | T^{m-1} u) \leq \|T^\top T^m u\| \|T^{m-1} u\|$$

und damit aufgrund des Normalitätskriteriums auch

$$\|T^m u\|^2 \leq \|T^{m+1} u\| \|T^{m-1} u\| \leq \|T^{m+1}\| \|T^{m-1}\| \|u\|^2,$$

woraus sich $\|T^m\|^2 \leq \|T^{m+1}\| \|T^{m-1}\|$ ergibt. Unter der Induktionsvoraussetzung, daß $\|T\|^m \leq \|T^m\|$ für ein $m \in \mathbb{N}$ gilt, folgt daraus

$$\|T\|^{m+1} \|T\|^{m-1} = \|T\|^{2m} \leq \|T^m\|^2 \leq \|T^{m+1}\| \|T\|^{m-1}$$

und somit wegen $\|T\| > 0$ die Induktionsbehauptung $\|T\|^{m+1} \leq \|T^{m+1}\|$. $\square$