Vorlesung 32

# Vollstetige normale Operatoren

**Vollstetige normale Operatoren.** Sei $(V, (\ |\ ))$ ein Hilbert-Raum über $\mathbb{C}$.

1. Sei $N \subset \mathbb{N}$ und $\{v_k\}_{k\in N} \subset V$ ein Orthonormalsystem und $\{\mu_k\}_{k\in N} \subset \mathbb{C}$ eine Folge, für die ein $r \geq 0$ existiert, so daß $|\mu_k| \leq r$ für alle $k \in N$ gilt. Dann wird durch

$$Tv = \textstyle\sum_{k\in N} \mu_k (v_k|v) v_k \quad \text{für } v \in V$$

ein Operator $T \in \mathcal{L}(V;V)$ definiert, denn für jedes $v \in V$ gilt die Abschätzung

$$\|Tv\|^2 = \textstyle\sum_{k\in N} |\mu_k|^2 |(v_k|v)|^2 \leq r^2 \sum_{k\in N} |(v_k|v)|^2 \leq r^2 \|v\|^2.$$

2. Um einzusehen, daß der Operator $T \in \mathcal{L}(V;V)$ normal ist, wird die Gestalt des transponierten Operators $T^\top \in \mathcal{L}(V;V)$ untersucht: Für alle $u, v \in V$ folgt aus

$$(u|Tv) = \textstyle\sum_{k\in N} \mu_k (u|v_k)(v_k|v) = \big(\sum_{k\in N} \overline{\mu_k (u|v_k)}\, v_k \big| v\big) = (T^\top u|v)$$

die Darstellung

$$T^\top u = \textstyle\sum_{k\in N} \overline{\mu}_k (v_k|u) v_k \quad \text{für } u \in V.$$

Somit ergibt sich aus den beiden Darstellungen für $Tu$ und $T^\top u$ jeweils

$$T^\top T u = \textstyle\sum_{k\in N} \mu_k (v_k|u) T^\top v_k = \sum_{k\in N} |\mu_k|^2 (v_k|u) v_k,$$
$$T T^\top u = \textstyle\sum_{k\in N} \overline{\mu}_k (v_k|u) T v_k = \sum_{k\in N} |\mu_k|^2 (v_k|u) v_k$$

für alle $u \in V$ und damit tatsächlich $T^\top T = T T^\top$.

3. Ist $N \subset \mathbb{N}$ endlich, so ist $T \in \mathcal{L}(V;V)$ vollstetig. Im Falle $N = \mathbb{N}$ gilt genau dann $T \in \mathcal{K}(V;V)$, wenn $\lim_{k\to\infty} |\mu_k| = 0$ ist: Definiert man nämlich für jedes $m \in \mathbb{N}$ einen Operator $T_m \in \mathcal{K}(V;V)$ mit endlichdimensionalem Bildraum durch

$$T_m u = \textstyle\sum_{k=1}^{m} \mu_k (v_k|u) v_k \quad \text{für } u \in V,$$

dann folgt wie oben die Abschätzung

$$\|T_m u - Tu\|^2 = \textstyle\sum_{k=m+1}^{\infty} |\mu_k|^2 |(v_k|u)|^2 \leq \sup_{k\in\mathbb{N}, k>m} |\mu_k|^2 \|u\|^2.$$

Ist nun $\{|\mu_k|\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Nullfolge, dann gilt

$$\lim_{m\to\infty} \|T_m - T\| \leq \lim_{m\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}, k>m} |\mu_k|^2 = 0$$

und damit $T \in \mathcal{K}(V;V)$ wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{K}(V;V)$ in $\mathcal{L}(V;V)$.

4. Gäbe es hingegen eine Teilfolge $\{k_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ und eine Konstante $c > 0$, so daß $|\mu_{k_\ell}|^2 \geq c$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ gälte, dann erhielte man aus der Orthonormalität

$$\|Tv_{k_\ell} - Tv_{k_m}\|^2 = \|\mu_{k_\ell} v_{k_\ell} - \mu_{k_m} v_{k_m}\|^2 = |\mu_{k_\ell}|^2 + |\mu_{k_m}|^2 \geq 2c$$

für alle $\ell, m \in \mathbb{N}$ mit $\ell \neq m$. Wegen der Beschränktheit der Folge $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ könnte $T \in \mathcal{L}(V;V)$ somit nicht vollstetig sein.

**Spektralsatz für vollstetige normale Operatoren.** Sei $(V, (\ |\ ))$ ein Hilbert-Raum über $\mathbb{C}$ und $T \in \mathcal{K}(V;V)$ normal.

1. Dann besitzt der Operator $T$ die Darstellung

$$Tu = \sum_{k \in N} \mu_k (v_k | u) v_k \quad \text{für } u \in V.$$

Hierbei ist $N \subset \mathbb{N}$ abzählbar und $\{v_k\}_{k \in N} \subset V$ ein Orthonormalsystem von Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\{\mu_k\}_{k \in N} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ von $T$.

2. Zu jedem Eigenwert $\mu_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gehört die Riesz-Zahl $r = 1$, das heißt, algebraische und geometrische Vielfachheit von $\mu_k$ stimmen überein.

3. Es gilt die Zerlegung $V = \operatorname{cl}\big(T^{-1}[\{0\}] + \operatorname{lin}\{v_k \in V : k \in N\}\big)$.

4. Ist $N \subset \mathbb{N}$ eine unendliche Menge, dann gilt $\lim_{k \in N, k \to \infty} |\mu_k| = 0$.

*Beweis.* 1. Aufgrund des Spektralsatzes für vollstetige Operatoren besteht $\sigma(T) \setminus \{0\}$ aus Eigenwerten $\{\mu_k\}_{k \in N}$, wobei $\lim_{k \in N, k \to \infty} |\mu_k| = 0$ gilt, falls $N \subset \mathbb{N}$ eine unendliche Menge ist. In dieser Aufzählung soll $\mu_k \neq \mu_\ell$ für alle $k, \ell \in N$ mit $k \neq \ell$ gelten. Außerdem sind die Eigenräume $N_k = (\mu_k I - T)^{-1}[\{0\}]$ für alle $k \in N$ endlichdimensional. Bezeichnet man den Kern mit $N_0 = T^{-1}[\{0\}]$ und setzt $\mu_0 = 0$, dann ist mit $T$ auch $\mu_k I - T \in \mathcal{L}(V;V)$ für jedes $k \in N \cup \{0\}$ normal. Aufgrund des Normalitätskriteriums ergibt sich daraus

$$N_k = (\mu_k I - T)^{-1}[\{0\}] = (\overline{\mu}_k I - T^\intercal)^{-1}[\{0\}] \quad \text{für jedes } k \in N \cup \{0\}.$$

2. Da für alle $k, \ell \in N \cup \{0\}$ mit $k \neq \ell$ stets $\mu_k \neq \mu_\ell$ gilt, folgt für alle $u_k \in N_k$ und $u_\ell \in N_\ell$ die Orthogonalität $(u_k | u_\ell) = 0$, das heißt, die linearen Teilräume $N_k$ und $N_\ell$ von $V$ stehen jeweils senkrecht aufeinander.

3. Sei $U = \sum_{k \in N \cup \{0\}} N_k$ die Summe der paarweise orthogonalen linearen Teilräume $N_k$ von $V$ über alle $k \in N \cup \{0\}$. Um einzusehen, daß $V = \operatorname{cl} U$ gilt, genügt es wegen $U \subset \operatorname{cl} U$, also $(\operatorname{cl} U)^\perp \subset U^\perp$ und somit $U^{\perp\perp} \subset (\operatorname{cl} U)^{\perp\perp} = \operatorname{cl} U$ zu zeigen, daß für das orthogonale Komplement $U^\perp = \{0\}$ gilt:

Da für alle $w \in U^\perp$, $u \in N_k$ und $k \in N \cup \{0\}$ wegen

$$(u | Tw) = (T^\intercal u | w) = (\mu_k u | w) = \overline{\mu}_k (u | w) = 0$$

stets $Tw \in U^\perp$ gilt, ist $U^\perp$ ein abgeschlossener linearer Teilraum mit $T[U^\perp] \subset U^\perp$. und die Einschränkung $T_0 = T|U^\perp \in \mathcal{L}(U^\perp; U^\perp)$ ebenfalls normal. Hätte man $U^\perp \neq \{0\}$, dann gäbe es aufgrund des Satzes über den Spektralradius normaler Operatoren ein $\mu \in \sigma(T_0)$ mit $|\mu| = \|T_0\|$. Im Falle $T_0 \neq 0$ wäre $\mu \in \sigma(T_0)$ nach dem Spektralsatz für vollstetige Operatoren ein Eigenwert von $T_0$ und damit auch von $T$. Dies würde aber $N_k \cap U^\perp \neq \{0\}$ für ein $k \in N$ bedeuten, was im Widerspruch zur Definition von $U$ stünde. Wäre $T_0 = 0$, so bekäme man mit $U^\perp \subset T^{-1}[\{0\}] = N_0$ ebenfalls einen Widerspruch zur Definition von $U$. Damit war die Annahme falsch, es gilt $U^\perp = \{0\}$ und somit tatsächlich $V = U^{\perp\perp} \subset (\operatorname{cl} U)^{\perp\perp} = \operatorname{cl} U$.

4. Ist $P_k \in \mathcal{L}(V;V)$ für $k \in N \cup \{0\}$ der orthogonale Projektor von $V$ auf $N_k$, so ergibt sich für jedes $u \in V$ die Darstellung $u = \sum_{k\in N\cup\{0\}} P_k u$ und deshalb

$$Tu = \sum_{k\in N\cup\{0\}} TP_k u = \sum_{k\in N} \mu_k P_k u \quad \text{für alle } u \in V.$$

Daraus folgt die gewünschte Darstellung von $T \in \mathcal{K}(V;V)$, wenn man für jedes $k \in N$ Orthonormalbasen $\{v_{k1},\dots,v_{kn_k}\}$ der Dimension $n_k = \dim N_k \in \mathbb{N}$ wählt und somit $P_k u = \sum_{\ell=1}^{n_k}(v_{k\ell}|u)v_{k\ell}$ für $u \in V$ erhält.

5. Aus der Darstellung $u = \sum_{k\in N\cup\{0\}} P_k u$ folgt $N_k = [(\mu_k I - T)^2]^{-1}[\{0\}]$ für jedes $k \in N$, denn für $u \in [(\mu_k I - T)^2]^{-1}[\{0\}]$ gilt

$$0 = (\mu_k I - T)^2 u = \sum_{\ell\in N\cup\{0\}}(\mu_k I - T)^2 P_\ell u = \sum_{\ell\in N\cup\{0\}}(\mu_k - \mu_\ell)^2 P_\ell u,$$

also $P_\ell u = 0$ für alle $\ell \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ mit $\ell \neq k$ und somit $u \in N_k = (\mu_k I - T)^{-1}[\{0\}]$. Damit besitzt jeder Eigenwert $\mu_k \in \sigma(T)\setminus\{0\}$ von $T$ die Riesz-Zahl $r = 1$. $\square$

**Spezialfälle normaler Operatoren.** Sei $(V,(\,|\,))$ ein Hilbert-Raum über $\mathbb{C}$ sowie ferner $\mu \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von $T \in \mathcal{L}(V;V)$.

1. Im *hermiteschen* Fall $T^\intercal = T$ gilt $\overline{\mu} = \mu$, das heißt, $\mu$ ist reell.
2. Im Falle $T^\intercal = -T$ gilt $\overline{\mu} = -\mu$, also ist $\mu$ imaginär.
3. Im *unitären* Fall $T^\intercal T = I = TT^\intercal$ folgt $|\mu|^2 = 1$, das heißt, $\mu$ liegt auf der Einheitskreislinie der komplexen Ebene.

*Beweis.* Sei $(\mu,u) \in \mathbb{C}\times V$ ein Paar mit $u \neq 0$ und $Tu = \mu u$.

1. Im Falle $T^\intercal = T$ ergibt sich $\overline{\mu} = \mu$ aus $u \neq 0$ und

$$\mu\|u\|^2 = (u|\mu u) = (u|Tu) = (T^\intercal u|u) = (Tu|u) = (\mu u|u) = \overline{\mu}\|u\|^2.$$

2. Im Falle $T^\intercal = -T$ folgt $\overline{\mu} = -\mu$ aus $u \neq 0$ und

$$-\mu\|u\|^2 = -(u|\mu u) = -(u|Tu) = -(T^\intercal u|u) = (Tu|u) = (\mu u|u) = \overline{\mu}\|u\|^2.$$

3. Schließlich ergibt sich im Falle $T^\intercal T = I$ aus

$$\|u\|^2 = (T^\intercal Tu|u) = (Tu|Tu) = (\mu u|\mu u) = |\mu|^2\|u\|^2$$

und $u \neq 0$ stets $|\mu|^2 = 1$. $\square$