Vorlesung 4

Beschränkte und stetige Abbildungen

Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Abbildungen. Seien (X, ρ_X) und (Y, ρ_Y) metrische Räume, ferner $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Abbildungen $T_k : X \to Y$.

1. Die Folge $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *konvergiert punktweise* gegen die Abbildung $T : X \to Y$, wenn für alle $u \in X$ die Beziehung $\lim_{k\to\infty} \rho_Y(T_k u, Tu) = 0$ gilt.

2. Die Folge $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gleichmäßig* gegen die Abbildung $T : X \to Y$, wenn $\lim_{k\to\infty} \sup_{u\in X} \rho_Y(T_k u, Tu) = 0$ gilt.

Beschränkte Abbildungen. Seien (X, ρ_X) und (Y, ρ_Y) metrische Räume.

1. Man bezeichnet eine Abbildung $T : X \to Y$ als *beschränkt*, wenn das Bild $T[X]$ in Y beschränkt ist.

2. Die Menge $B(X; Y)$ aller beschränkten Abbildungen $T : X \to Y$ wird mit folgender Metrik $\rho : B(X; Y) \times B(X; Y) \to \mathbb{R}$ ausgestattet:

$$\rho(T_1, T_2) = \sup_{u\in X} \rho_Y(T_1 u, T_2 u) \quad \text{für } T_1, T_2 \in B(X; Y).$$

3. Der metrische Raum $(B(X; Y), \rho)$ ist vollständig, wenn (Y, ρ_Y) vollständig ist.

Beweis. Sei $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $B(X; Y)$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\rho_Y(T_k u, T_\ell u) \le \rho(T_k, T_\ell) < \varepsilon$ für alle $k, \ell \ge k_0$ und $u \in X$ gilt. Da Y vollständig ist, konvergiert somit die Folge $\{T_k u\}_{k\in\mathbb{N}}$ in Y für jedes $u \in X$ gegen einen Grenzwert $Tu \in Y$, wodurch eine Abbildung $T : X \to Y$ definiert wird. Führt man in $\rho_Y(T_k u, Tu) \le \rho_Y(T_k u, T_\ell u) + \rho_Y(T_\ell u, Tu) \le \varepsilon + \rho_Y(T_\ell u, Tu)$ den Grenzübergang $\ell \to \infty$ aus, so erhält man $\rho_Y(T_k u, Tu) \le \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \ge k_0$ und jedes $u \in X$. Zunächst folgt daraus für alle $u, v \in X$ die Beziehung

$$\begin{aligned}\rho_Y(Tu, Tv) &\le \rho_Y(Tu, T_{k_0}u) + \rho_Y(T_{k_0}u, T_{k_0}v) + \rho_Y(T_{k_0}v, Tv)\\ &\le \rho_Y(T_{k_0}u, T_{k_0}v) + 2\varepsilon\end{aligned}$$

und somit die Beschränktheit von $T[X]$ in Y wegen $T_{k_0} \in B(X; Y)$, also $T \in B(X; Y)$. Bildet man das Supremum über alle $u \in X$ in der Ungleichung $\rho_Y(T_k u, Tu) \le \varepsilon$, so ergibt sich überdies $\rho(T_k, T) \le \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \ge k_0$, mit anderen Worten, die Folge $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $B(X; Y)$ gegen $T \in B(X; Y)$. □

Stetige Abbildungen. Seien (X, ρ_X) und (Y, ρ_Y) metrische Räume.

1. Eine Abbildung $T : X \to Y$ heißt *stetig im Punkt* $u \in X$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für alle $v \in X$ aus $\rho_X(u, v) < \delta$ stets $\rho_Y(Tu, Tv) < \varepsilon$ folgt.

2. Man nennt $T : X \to Y$ *stetig*, wenn T in jedem Punkt $u \in X$ stetig ist.

3. Die Menge aller stetigen Abbildungen $T : X \to Y$ wird mit $C(X; Y)$ bezeichnet.

Äquivalente Charakterisierungen der Stetigkeit. Sind (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) metrische Räume und $T : X \to Y$ eine Abbildung, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. Die Abbildung T ist stetig.
2. Für jede Teilmenge $E \subset X$ gilt $T[\operatorname{cl} E] \subset \operatorname{cl} T[E]$.
3. Ist E in Y abgeschlossen, so ist das Urbild $T^{-1}[E]$ in X abgeschlossen.
4. Für jede in Y offene Teilmenge E ist das Urbild $T^{-1}[E]$ in X offen.

Stetigkeit der Verkettung. Seien (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) und (Z, ρ_Z) metrische Räume. Ist $T_1 : X \to Y$ stetig (im Punkt $u \in X$) sowie $T_2 : Y \to Z$ stetig (im Punkt $T_1 u \in Y$), dann ist die Verkettung $T_2 T_1 : X \to Z$ stetig (im Punkt $u \in X$).

Stetigkeit der Einschränkung. Seien (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) metrische Räume und X_0 eine nichtleere Teilmenge von X. Ist $T : X \to Y$ stetig (im Punkt $u \in X_0$), so ist auch die *Einschränkung* $T_0 = T|X_0$ *von* T *auf* X_0 stetig (im Punkt $u \in X_0$).

Beschränkte stetige Abbildungen. Seien (X, ρ_X) und (Y, ρ_Y) metrische Räume.

1. Der Teilraum $BC(X; Y) = B(X; Y) \cap C(X; Y)$ von $(B(X; Y), \rho)$, der aus allen *beschränkten stetigen* Abbildungen $T : X \to Y$ besteht, wird mit der induzierten Metrik ρ ausgestattet.

2. Der Raum $(BC(X; Y), \rho)$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $(B(X; Y), \rho)$. Die Vollständigkeit von (Y, ρ_Y) überträgt sich auf $(BC(X; Y), \rho)$.

Beweis. Sei $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset BC(X; Y)$ eine Folge, die in $B(X; Y)$ gegen einen Grenzwert $T \in B(X; Y)$ konvergiert. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\rho(T_k, T) \le \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \ge k_0$ gilt. Sei $u \in X$ ein beliebig gegebener Punkt. Dann existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle $v \in X$ aus $\rho_X(u, v) < \delta$ stets $\rho_Y(T_{k_0} u, T_{k_0} v) \le \frac{\varepsilon}{3}$ folgt. Da $\rho_Y(T_k v, T v) \le \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \ge k_0$ und $v \in X$ gilt, folgt daraus

$$\rho_Y(Tu, Tv) \le \rho_Y(Tu, T_{k_0} u) + \rho_Y(T_{k_0} u, T_{k_0} v) + \rho_Y(T_{k_0} v, T v) \le \varepsilon$$

für alle $v \in X$ mit $\rho_X(u, v) < \delta$, das heißt, die Stetigkeit von T im beliebig gewählten Punkt $u \in X$. Damit ist $BC(X; Y)$ in $(B(X; Y), \rho)$ abgeschlossen.

Ist (Y, ρ_Y) vollständig, dann ist $(B(X; Y), \rho)$ vollständig und somit auch dessen abgeschlossener Teilraum $(BC(X; Y), \rho)$. □

Homöomorphismen. Seien (X, ρ_X) und (Y, ρ_Y) metrische Räume.

1. Eine bijektive Abbildung $T : X \leftrightarrow Y$ heißt *Homöomorphismus*, wenn sowohl $T : X \to Y$ als auch die Inverse $T^{-1} : Y \to X$ stetig sind.

2. Man nennt zwei Metriken $\rho_1, \rho_2 : X \times X \to \mathbb{R}$ *äquivalent auf* X, wenn die identische Abbildung von (X, ρ_1) auf (X, ρ_2) ein Homöomorphismus ist.

Gleichmäßig stetige Abbildungen. Seien (X, ρ_X) und (Y, ρ_Y) metrische Räume.

1. Eine Abbildung $T : X \to Y$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle $u, v \in X$ aus $\rho_X(u, v) < \delta$ stets $\rho_Y(Tu, Tv) < \varepsilon$ folgt.

2. Man nennt $T : X \to Y$ *Lipschitz-stetig*, wenn eine *Lipschitz-Konstante* $L \geq 0$ existiert, so daß für alle $u, v \in X$ die Bedingung $\rho_Y(Tu, Tv) \leq L\rho_X(u, v)$ gilt.

3. Eine bijektive Abbildung $T : X \leftrightarrow Y$ wird als *Isometrie* bezeichnet, wenn die Beziehung $\rho_Y(Tu, Tv) = \rho_X(u, v)$ für alle $u, v \in X$ erfüllt wird.

Lipschitz-Stetigkeit der Metrik. Sei (X, ρ) ein metrischer Raum. Definiert man im Produktraum $X \times X$ eine Metrik durch

$$\rho_{X\times X}\big((u, v), (\tilde{u}, \tilde{v})\big) = \rho(u, \tilde{u}) + \rho(v, \tilde{v}) \quad \text{für } (u, v), (\tilde{u}, \tilde{v}) \in X \times X,$$

und in $\mathbb{R}$ eine Metrik durch die Zuordnung $(a, b) \mapsto |a - b|$ für $a, b \in \mathbb{R}$, dann ist die Metrik $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ von X eine Lipschitz-stetige Funktion von $X \times X$ nach $\mathbb{R}$, denn für alle $(u, v), (\tilde{u}, \tilde{v}) \in X \times X$ ergibt sich aus den Dreiecksungleichungen

$$\rho(u, v) - \rho(\tilde{u}, \tilde{v}) \leq \rho(u, \tilde{u}) + \rho(\tilde{v}, v) \;\text{ und }\; \rho(\tilde{u}, \tilde{v}) - \rho(u, v) \leq \rho(\tilde{u}, u) + \rho(v, \tilde{v})$$

die Abschätzung $|\rho(u, v) - \rho(\tilde{u}, \tilde{v})| \leq \rho(u, \tilde{u}) + \rho(v, \tilde{v}) = \rho_{X\times X}\big((u, v), (\tilde{u}, \tilde{v})\big)$.

Satz von Dini über monotone Konvergenz reellwertiger Funktionale. Ist (X, ρ) ein kompakter metrischer Raum und sind $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset BC(X;\mathbb{R})$ und $T \in BC(X;\mathbb{R})$ derart gegeben, daß $T_k u \leq T_{k-1}u$ sowie $\lim_{k\to\infty} |T_k u - Tu| = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $u \in X$ gilt, dann folgt daraus $\lim_{k\to\infty} \sup_{u\in X} |T_k u - Tu| = 0$.

Beweis. 1. Nach Voraussetzung gilt $Tu \leq T_k u \leq T_{k-1}u$ sowie $\lim_{k\to\infty} |T_k u - Tu| = 0$ für alle $u \in X$ und $k \in \mathbb{N}$. Somit gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $u \in X$ einen Index $k(u) \in \mathbb{N}$, so daß $0 \leq T_k u - Tu \leq \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k(u)$ erfüllt ist.

2. Wegen der Stetigkeit von $T \in BC(X;\mathbb{R})$ und $T_{k(v)} \in BC(X;\mathbb{R})$ gibt es für jedes $v \in X$ ein $\delta(v) > 0$, so daß für jedes $u \in X$ aus $\rho(u, v) < \delta(v)$ stets $|Tu - Tv| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ und $|T_{k(v)}u - T_{k(v)}v| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ folgt und somit nach Schritt 1 auch

$$0 \leq T_{k(v)}u - Tu \leq |T_{k(v)}u - T_{k(v)}v| + |T_{k(v)}v - Tv| + |Tv - Tu| \leq \varepsilon.$$

3. Da die Familie $\{B(v, \delta(v))\}_{v\in X}$ eine offene Überdeckung des kompakten metrischen Raums (X, ρ) bildet, kann man eine endliche Menge $\{u_1, \ldots, u_m\} \subset X$ finden, so daß auch die Teilfamilie $\{B(u_1, \delta(u_1)), \ldots, B(u_m, \delta(u_m))\}$ den Raum X überdeckt, das heißt, für jedes $u \in X$ gibt es ein $\ell \in \{1, \ldots, m\}$ mit $u \in B(u_\ell, \delta(u_\ell))$. Somit gilt für den größten Index $k_0 = \max\{k(u_1), \ldots, k(u_m)\} \in \mathbb{N}$ nach Schritt 1 und 2

$$0 \leq T_k u - Tu \leq T_{k_0}u - Tu \leq T_{k(u_\ell)}u - Tu \leq \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, k \geq k_0,$$

woraus sich die gleichmäßige Konvergenz $\lim_{k\to\infty} \sup_{u\in X} |T_k u - Tu| = 0$ ergibt. $\square$

Halbstetige reellwertige Funktionale. Sei (X, ρ) ein metrischer Raum.

1. Die Abbildung $T : X \to \mathbb{R}$ heißt *unterhalb stetig*, wenn für jedes $u \in X$ und jede Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$, die gegen den Grenzwert $u \in X$ konvergiert, die Beziehung $Tu \leq \liminf_{k\to\infty} Tu_k$ erfüllt ist.
2. Die Abbildung $T : X \to \mathbb{R}$ heißt *oberhalb stetig*, falls für jedes $u \in X$ und jede Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$, die gegen den Grenzwert $u \in X$ konvergiert, die Beziehung $Tu \geq \limsup_{k\to\infty} Tu_k$ gilt.

Bemerkung. Die Abbildung $T : X \to \mathbb{R}$ ist genau dann oberhalb stetig, wenn die Abbildung $-T : X \to \mathbb{R}$ unterhalb stetig ist. Die Abbildung $T : X \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, wenn sie unterhalb und oberhalb stetig ist.

Extremwertsatz von Weierstraß. Sei (X, ρ) ein kompakter metrischer Raum.

1. Ist $T : X \to \mathbb{R}$ unterhalb stetig, dann existiert ein $u_* \in X$ mit $Tu_* = \inf_{u\in X} Tu$.
2. Ist $T : X \to \mathbb{R}$ oberhalb stetig, so gibt es ein $u^* \in X$ mit $Tu^* = \sup_{u\in X} Tu$.

Beweis. 1. Sei $T : X \to \mathbb{R}$ unterhalb stetig. Angenommen, die Bildmenge $T[X] \subset \mathbb{R}$ wäre nicht nach unten beschränkt. Dann könnte man eine Folge $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ finden, so daß $Tv_k \leq -k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ gälte. Wegen der Kompaktheit von X könnte man eine Teilfolge $\{v_{k_\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ von $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ auswählen, die gegen einen Grenzwert $v \in X$ konvergiert. Aufgrund der Unterhalbstetigkeit von T erhielte man die Endlichkeit des Wertes $Tv \leq \liminf_{\ell\to\infty} Tv_{k_\ell}$ im Widerspruch zur Wahl der Folge $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Damit ist das Bild $T[X] \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt. Es existiert also ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a = \inf_{u\in X} Tu$ sowie eine Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$, so daß $Tu_k \leq a + 2^{-k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Aufgrund der Kompaktheit von X kann man eine Teilfolge $\{u_{k_\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ von $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ finden, die gegen einen Grenzwert $u_* \in X$ konvergiert. Wegen der Unterhalbstetigkeit von T folgt daraus

$$a \leq Tu_* \leq \liminf_{\ell\to\infty} Tu_{k_\ell} \leq \lim_{\ell\to\infty}(a + 2^{-k_\ell}) = a$$

ergibt sich schließlich $Tu_* = a = \inf_{u\in X} Tu$.

2. Ist $T : X \to \mathbb{R}$ oberhalb stetig, dann ist $-T : X \to \mathbb{R}$ unterhalb stetig. Nach Schritt 1 gibt es ein $u^* \in X$ mit $-Tu^* = \inf_{u\in X}(-Tu) = -\sup_{u\in X} Tu$. □