

## Stetige Bilder kompakter Mengen

**Stetige Bilder kompakter Mengen.** Sind  $(X, \rho_X)$  und  $(Y, \rho_Y)$  metrische Räume und  $T : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung, so gilt:

1. Für jede in  $X$  kompakte Teilmenge  $K$  ist das Bild  $T[K]$  kompakt in  $Y$ .
2. Ist  $(X, \rho_X)$  kompakt, so ist  $T : X \rightarrow Y$  beschränkt und gleichmäßig stetig.
3. Ist  $(X, \rho_X)$  kompakt und  $T : X \leftrightarrow Y$  bijektiv, so ist  $T$  ein Homöomorphismus.

*Beweis.* 1. Seien  $K$  eine kompakte Teilmenge von  $X$  und  $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subset Y$  eine offene Überdeckung des Bildes  $T[K]$  in  $Y$ . Dann ist  $\{T^{-1}[U_\gamma]\}_{\gamma \in \Gamma}$  eine offene Überdeckung von  $K$  in  $X$ . Aufgrund der Kompaktheit von  $K$  gibt es eine endliche Indexmenge  $\Gamma_0 \subset \Gamma$ , so daß bereits die endliche Teilfamilie  $\{T^{-1}[U_\gamma]\}_{\gamma \in \Gamma_0}$  die Menge  $K$  überdeckt. Wegen  $TT^{-1}[U_\gamma] = U_\gamma \cap T[X]$  ergibt sich aus  $K \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} T^{-1}[U_\gamma]$  offenbar

$$T[K] \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} TT^{-1}[U_\gamma] \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} U_\gamma,$$

das heißt, die endliche Teilfamilie  $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma_0}$  ist eine offene Überdeckung von  $T[K]$  und damit  $T[K]$  eine kompakte Teilmenge von  $Y$ .

2. Sei  $(X, \rho_X)$  kompakt. Da das Bild  $T[X]$  nach Schritt 1 kompakt und damit beschränkt in  $Y$  ist, ergibt sich  $T \in BC(X; Y)$ . Angenommen,  $T : X \rightarrow Y$  wäre nicht gleichmäßig stetig. Dann gäbe es ein  $\varepsilon > 0$  und Folgen  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  sowie  $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  in  $X$ , so daß  $\rho_X(u_k, v_k) \leq 2^{-k}$  und  $\rho_Y(Tu_k, Tv_k) \geq 2\varepsilon$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$  gelten würde. Wegen der Kompaktheit von  $X$  könnte man eine Teilfolge  $\{u_{k_\ell}\}_{\ell \in \mathbb{N}}$  von  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  finden, die in  $X$  gegen einen Grenzwert  $u \in X$  konvergiert. Wegen  $\rho_X(u_{k_\ell}, v_{k_\ell}) \leq 2^{-k_\ell}$  und

$$\rho_X(v_{k_\ell}, u) \leq \rho_X(v_{k_\ell}, u_{k_\ell}) + \rho_X(u_{k_\ell}, u) \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}$$

würde auch die Teilfolge  $\{v_{k_\ell}\}_{\ell \in \mathbb{N}}$  von  $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  in  $X$  gegen  $u \in X$  konvergieren.

Aufgrund der Stetigkeit von  $T : X \rightarrow Y$  in  $u \in X$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß für alle  $v \in X$  aus  $\rho_X(u, v) \leq \delta$  stets  $\rho_Y(Tu, Tv) \leq \frac{\varepsilon}{2}$  folgt. Für alle  $\ell \in \mathbb{N}$  mit  $\rho_X(u_{k_\ell}, u) \leq \delta$  und  $\rho_X(v_{k_\ell}, u) \leq \delta$  erhielte man den Widerspruch

$$\rho_Y(Tu_{k_\ell}, Tv_{k_\ell}) \leq \rho_Y(Tu_{k_\ell}, Tu) + \rho_Y(Tv_{k_\ell}, Tu) \leq \varepsilon.$$

Damit ist  $T : X \rightarrow Y$  gleichmäßig stetig.

3. Sei  $(X, \rho_X)$  kompakt,  $T : X \leftrightarrow Y$  bijektiv und  $K \subset X$  eine beliebig vorgegebene, in  $X$  abgeschlossene Teilmenge. Dann muß  $K$  auch kompakt in  $X$  sein. Aufgrund von Schritt 1 folgt daraus die Kompaktheit und somit die Abgeschlossenheit des Urbildes  $T[K]$  in  $Y$  bezüglich der inversen Abbildung  $T^{-1} : Y \leftrightarrow X$ , die damit stetig ist.  $\square$

**Universalität der Cantor-Menge.** Eine Teilmenge  $K$  eines metrischen Raum  $(X, \rho)$  ist genau dann kompakt, wenn sie ein stetiges Bild der Cantor-Menge  $C \subset [0, 1]$  ist, das heißt, wenn es eine stetige Abbildung  $T : C \rightarrow X$  mit  $T[C] = K$  gibt.

*Beweis.* 1. Sei  $K \subset X$  kompakt und  $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  eine Nullfolge positiver Zahlen. Dann existiert nach dem Kompaktheitskriterium von Hausdorff für jedes  $k \in \mathbb{N}$  ein endliches  $\varepsilon_k$ -Netz  $\{u_{k1}, \dots, u_{km_k}\} \subset K$  für  $K$ , wobei durch eine eventuelle Hinzunahme von Punkten stets erreicht werden kann, daß  $m_k = 2^{p_k}$  für ein  $p_k \in \mathbb{N}$  gilt und  $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$  eine wachsende Folge ist. Für die weiteren Betrachtungen sei  $M$  die Menge aller Folgen  $\{k_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ , so daß  $k_\ell \in \{1, \dots, 2^{p_\ell}\}$  für jedes  $\ell \in \mathbb{N}$  gilt.

2. Da die Menge  $K$  von der Familie der Kugeln  $\{B(u_{11}, \varepsilon_1), \dots, B(u_{12^{p_1}}, \varepsilon_1)\}$  überdeckt wird, ergibt sich die Darstellung  $K = \bigcup_{k_1=1}^{2^{p_1}} K_{k_1}$  als Vereinigung nichtleerer kompakter Teilmengen  $K_{k_1} = K \cap K(u_{1k_1}, \varepsilon_1)$  von  $K$  mit  $\text{diam } K_{k_1} \leq 2\varepsilon_1$ . Analog dazu kann man mit Hilfe des  $\varepsilon_2$ -Netzes für  $K$  für jedes  $k_1 \in \{1, \dots, 2^{p_1}\}$  und  $k_2 \in \{1, \dots, 2^{p_2}\}$  nichtleere kompakte Teilmengen  $K_{k_1 k_2} = K_{k_1} \cap K(u_{2k_2}, \varepsilon_2)$  von  $K_{k_1}$  finden, so daß  $K_{k_1} = \bigcup_{k_2=1}^{2^{p_2}} K_{k_1 k_2}$  und  $\text{diam } K_{k_1 k_2} \leq 2\varepsilon_2$  gilt.

Fährt man für wachsendes  $\ell \in \mathbb{N}$  fort, dann erhält man für jede Folge  $\{k_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \in M$  eine absteigende Familie  $K_{k_1} \supset K_{k_1 k_2} \supset \dots \supset K_{k_1 k_2 \dots k_\ell} \supset \dots$  nichtleerer kompakter Teilmengen von  $K$ , deren Durchmesser für  $\ell \rightarrow \infty$  gegen Null konvergiert. Der Durchschnitt  $K_{k_1} \cap K_{k_1 k_2} \cap \dots \cap K_{k_1 k_2 \dots k_\ell} \cap \dots$  jeder Familie besteht stets aus genau einem Punkt  $u \in K$ . Dadurch wird eine Abbildung  $\Phi : M \rightarrow K$  definiert, die jeder Folge  $\{k_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \in M$  einen eindeutig bestimmten Punkt  $u \in K$  zuordnet. Die Abbildung  $\Phi : M \rightarrow K$  ist surjektiv, da man für jeden Punkt  $u \in K$  nach Konstruktion eine Folge  $\{k_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \in M$  finden kann, so daß  $u \in K_{k_1} \cap K_{k_1 k_2} \cap \dots \cap K_{k_1 k_2 \dots k_\ell} \cap \dots$  gilt, jedoch nicht unbedingt injektiv, da der Punkt  $u \in K$  gleichzeitig zu mehreren Überdeckungsmengen gehören kann.

3. Die Cantor-Menge  $C \subset [0, 1]$  kann als Durchschnitt  $C = \bigcap_{k=0}^{\infty} F_k$  der absteigenden Familie  $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  kompakter Teilmengen  $F_k \subset [0, 1]$  dargestellt werden, die durch  $F_0 = [0, 1]$  und die rekursive Definition

$$F_k = \left\{ \frac{1}{3}x \in \mathbb{R} : x \in F_{k-1} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \in \mathbb{R} : x \in F_{k-1} \right\} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

gegeben sind. Die Menge  $F_{p_1} \subset [0, 1]$  ist als disjunkte Vereinigung  $F_{p_1} = \bigcup_{k_1=1}^{2^{p_1}} \Delta_{k_1}$  von  $2^{p_1}$  kompakten Intervallen  $\Delta_1, \dots, \Delta_{2^{p_1}} \subset [0, 1]$  mit  $\text{diam } \Delta_{k_1} = 3^{-p_1}$  darstellbar. Die  $2^{p_1} - 1$  Lücken zwischen diesen Intervallen haben mindestens den gleichen Durchmesser. Für jedes  $k_1 \in \{1, \dots, 2^{p_1}\}$  ist das Intervall  $\Delta_{k_1}$  als disjunkte Vereinigung  $\Delta_{k_1} = \bigcup_{k_2=1}^{2^{p_2}} \Delta_{k_1 k_2}$  von  $2^{p_2}$  kompakten Intervallen  $\Delta_{k_1 1}, \dots, \Delta_{k_1 2^{p_2}} \subset [0, 1]$  mit  $\text{diam } \Delta_{k_1 k_2} = 3^{-(p_1+p_2)}$  darstellbar. Wiederum haben die  $2^{p_2} - 1$  Lücken zwischen diesen Intervallen mindestens den gleichen Durchmesser.

Setzt man diese Betrachtungen für wachsendes  $\ell \in \mathbb{N}$  fort, dann erhält man für jede Folge  $\{k_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \in M$  eine absteigende Familie  $\Delta_{k_1} \supset \Delta_{k_1 k_2} \supset \cdots \supset \Delta_{k_1 k_2 \cdots k_\ell} \supset \cdots$  kompakter Intervalle, deren Durchmesser für  $\ell \rightarrow \infty$  gegen Null konvergiert. Der Durchschnitt  $\Delta_{k_1} \cap \Delta_{k_1 k_2} \cap \cdots \cap \Delta_{k_1 k_2 \cdots k_\ell} \cap \cdots$  jeder dieser Familien besteht jeweils aus genau einem Punkt  $x \in C$ . Dadurch wird eine Abbildung  $\Psi : M \rightarrow C$  definiert, die jeder Folge  $\{k_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \in M$  einen eindeutig bestimmten Punkt  $x \in C$  zuordnet. Aufgrund der Eindeutigkeit der triadischen Darstellung jedes Punktes  $x \in C$  ist diese Abbildung  $\Psi : M \leftrightarrow C$  sogar bijektiv.

4. Aufgrund von Schritt 2 und 3 ist die Verkettung der Inversen  $\Psi^{-1} : C \leftrightarrow M$  mit der Abbildung  $\Phi : M \rightarrow K$  eine surjektive Abbildung  $T = \Phi \Psi^{-1} : C \rightarrow K$ , welche also die Cantor-Menge  $C \subset [0, 1]$  auf die kompakte Menge  $K \subset X$  abbildet.

Um die Stetigkeit von  $T : C \rightarrow K$  einzusehen, seien  $\varepsilon > 0$  und  $x \in C$  vorgegeben. Man findet eine Folge  $\{k_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \in M$  mit  $x \in \Delta_{k_1} \cap \Delta_{k_1 k_2} \cap \cdots \cap \Delta_{k_1 k_2 \cdots k_\ell} \cap \cdots$  und  $Tx \in K_{k_1} \cap K_{k_1 k_2} \cap \cdots \cap K_{k_1 k_2 \cdots k_\ell} \cap \cdots$  sowie ein  $\ell \in \mathbb{N}$  mit  $\text{diam } K_{k_1 k_2 \cdots k_\ell} < \varepsilon$ , also  $Tx \in K_{k_1 k_2 \cdots k_\ell} \subset B(Tx, 2\varepsilon)$  und  $x \in \Delta_{k_1 k_2 \cdots k_\ell} \subset [0, 1]$ .

Setzt man  $\delta = \text{diam } \Delta_{k_1 k_2 \cdots k_\ell} > 0$ , dann können die Lücken zwischen den Intervallen  $\Delta_{k_1 k_2 \cdots k_{\ell-1} 1}, \dots, \Delta_{k_1 k_2 \cdots k_{\ell-1} 2^{\ell-1}}$  aufgrund der rekursiven Konstruktion nicht kürzer als der Durchmesser  $\delta$  dieser Intervalle sein und nicht zur Cantor-Menge  $C$  gehören. Somit folgt wegen  $x \in \Delta_{k_1 k_2 \cdots k_\ell}$  für alle  $y \in C$  aus  $|x - y| < \delta$  stets  $y \in \Delta_{k_1 k_2 \cdots k_\ell}$  und damit auch  $Ty \in K_{k_1 k_2 \cdots k_\ell} \subset B(Tx, 2\varepsilon)$ , das heißt,  $\rho(Tx, Ty) < 2\varepsilon$  für alle  $y \in C$  mit  $|x - y| < \delta$ , woraus sich die Stetigkeit von  $T : C \rightarrow K$  im beliebig vorgegebenen Punkt  $x \in C$  ergibt.

5. Ist umgekehrt  $T : C \rightarrow X$  eine stetige Abbildung, dann ist wegen der Kompaktheit der Cantor-Menge  $C$  auch ihr stetiges Bild  $T[C]$  kompakt in  $X$ .  $\square$

**Gleichmäßige Approximation durch stückweise konstante Abbildungen.** Seien  $(X, \rho_X)$  ein kompakter und  $(Y, \rho_Y)$  ein separabler metrischer Raum. Dann existiert im Raum  $(B(X; Y), \rho)$  eine abzählbare Teilmenge stückweise konstanter Abbildungen mit endlichem Wertebereich, die im Teilraum  $BC(X; Y)$  dicht liegt.

*Beweis.* 1. Sei  $\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  eine Nullfolge positiver Radien. Wegen der Kompaktheit von  $X$  kann man aufgrund des Hausdorff-Kriteriums für jedes  $k \in \mathbb{N}$  ein endliches  $\delta_k$ -Netz  $N_k \subset X$  für  $X$  wählen. Dann bildet für jedes  $k \in \mathbb{N}$  auch die Vereinigung  $M_k = \bigcup_{m=1}^k N_m = \{v_1, \dots, v_{m_k}\} \subset X$  ein endliches  $\delta_k$ -Netz für  $X$ . Offenbar sind die Familien  $\{B(v_1, \delta_k), \dots, B(v_{m_k}, \delta_k)\}$  offener Kugeln für alle  $k \in \mathbb{N}$  endliche Überdeckungen von  $X$ . Man bildet für jedes  $k \in \mathbb{N}$  durch die rekursive Vorschrift

$$E_{k\ell} = B(v_\ell, \delta_k) \setminus \bigcup_{m=1}^{\ell-1} E_{km} \quad \text{für } \ell \in \{1, \dots, m_k\}$$

eine endliche Familie  $\{E_{k1}, \dots, E_{km_k}\} \subset X$  paarweise disjunkter Mengen, die  $X$  ebenfalls überdecken, obwohl einige von ihnen auch leer sein können.

2. Sei  $D \subset Y$  eine in  $Y$  abzählbare dichte Teilmenge. Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  wird die Teilmenge  $P_k \subset B(X; Y)$  aller stückweise konstanten Abbildungen mit endlichem Wertebereich in  $D$  mit folgender Eigenschaft definiert: Für jedes  $\ell \in \{1, \dots, m_k\}$  gibt es ein  $g_\ell \in D$ , so daß  $Tu = g_\ell$  für alle  $u \in E_{k\ell}$  gilt. Dann ist  $P_k$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$  und damit auch deren Vereinigung  $P = \cup_{k \in \mathbb{N}} P_k$  eine abzählbare Teilmenge von  $B(X; Y)$ .

3. Werden  $\varepsilon > 0$  und  $T \in BC(X; Y)$  beliebig vorgegeben, dann ist  $T$  wegen der Kompaktheit von  $X$  gleichmäßig stetig: Es gibt ein  $\delta > 0$ , so daß für alle  $u, v \in X$  aus  $\rho_X(u, v) \leq \delta$  stets  $\rho_Y(Tu, Tv) \leq \frac{\varepsilon}{2}$  folgt. Man wählt ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $\delta_k \leq \delta$  und fixiert für jedes  $\ell \in \{1, \dots, m_k\}$  ein  $g_\ell \in D$ , so daß  $\rho_Y(Tv_\ell, g_\ell) \leq \frac{\varepsilon}{2}$  gilt. Darauf bauend definiert man die stückweise konstante Abbildung  $T_k \in P_k$  durch  $T_k u = g_\ell$  für alle  $u \in E_{k\ell}$  und  $\ell \in \{1, \dots, m_k\}$ .

4. Sei  $\ell \in \{1, \dots, m_k\}$  vorgegeben. Wegen Schritt 1 gilt für alle  $u \in E_{k\ell} \subset B(v_\ell, \delta_k)$  die Beziehung  $\rho_X(u, v_\ell) \leq \delta_k \leq \delta$  und somit  $\rho_Y(Tu, Tv_\ell) \leq \frac{\varepsilon}{2}$  nach Schritt 3. Da sich wegen Schritt 3 für jedes  $u \in E_{k\ell}$  auch  $\rho_Y(Tv_\ell, T_k u) = \rho_Y(Tv_\ell, g_\ell) \leq \frac{\varepsilon}{2}$  ergibt, erhält man damit  $\rho_Y(Tu, T_k u) \leq \rho_Y(Tu, Tv_\ell) + \rho_Y(Tv_\ell, T_k u) \leq \varepsilon$  für alle  $u \in E_{k\ell}$  und jedes  $\ell \in \{1, \dots, m_k\}$ , also für alle  $u \in X$ . Daraus folgt schließlich  $\rho(T, T_k) \leq \varepsilon$ .  $\square$

**Stetige Fortsetzung durch stückweise affine Abbildungen.** Ist  $C \subset [0, 1]$  die Cantor-Menge, dann existiert zu jeder stetigen Abbildung  $T_0 : C \rightarrow \mathbb{K}$  eine stetige Fortsetzung  $T : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $T|_C = T_0$  und  $\max_{x \in [0, 1]} |Tx| = \max_{x \in C} |T_0 x|$ , die auf  $[0, 1] \setminus C$  stückweise affin ist.

*Beweis.* 1. Wegen der Kompaktheit von  $C \subset [0, 1]$  ist  $T_0 : C \rightarrow \mathbb{K}$  gleichmäßig stetig: Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß für alle  $x, y \in C$  aus  $|x - y| \leq \delta$  stets  $|T_0 x - T_0 y| \leq \frac{\varepsilon}{3}$  folgt.

2. Die Cantor-Menge  $C \subset [0, 1]$  läßt sich als Durchschnitt  $C = \bigcap_{k=0}^{\infty} F_k$  der absteigenden Familie  $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  kompakter Teilmengen  $F_k \subset [0, 1]$  dargestellt, die durch  $F_0 = [0, 1]$  und die rekursive Definition

$$F_k = \left\{ \frac{1}{3}x \in \mathbb{R} : x \in F_{k-1} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \in \mathbb{R} : x \in F_{k-1} \right\} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

gegeben sind. Dabei ist  $F_k = \bigcup_{\ell=1}^{2^k} D_{k\ell}$  für jedes  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  eine disjunkte Vereinigung von  $2^k$  kompakten Intervallen  $D_{k\ell} = [x_{k\ell}, y_{k\ell}]$  der Länge  $3^{-k}$  mit Endpunkten

$$0 = x_{k1} < y_{k1} < \dots < x_{k\ell} < y_{k\ell} < \dots < x_{k2^k} < y_{k2^k} = 1,$$

die allesamt zur Cantor-Menge  $C \subset [0, 1]$  gehören.

Die Lücken zwischen den Intervallen  $D_{k1}, \dots, D_{k2^k}$  werden von der komplementären Menge  $[0, 1] \setminus F_k = \bigcup_{\ell=1}^{2^k-1} L_{k\ell}$  gefüllt, die aus einer disjunkten Vereinigung von  $2^k - 1$  offenen Intervallen  $L_{k\ell} = (y_{k\ell}, x_{k\ell+1})$  besteht, welche die Länge  $3^{-k}$  nicht unterschreiten. Das Komplement  $[0, 1] \setminus C$  der Cantor-Menge ist die Vereinigung  $\bigcup_{k=0}^{\infty} ([0, 1] \setminus F_k)$  einer aufsteigenden Familie  $\{[0, 1] \setminus F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  offener Teilmengen.

3. Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  definiert man eine stetige und stückweise affine Abbildung  $T_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$  wie folgt: Für jedes  $\ell \in \{1, \dots, 2^k\}$  setzt man

$$T_k x = \frac{y_{k\ell} - x}{y_{k\ell} - x_{k\ell}} T_0 x_{k\ell} + \frac{x - x_{k\ell}}{y_{k\ell} - x_{k\ell}} T_0 y_{k\ell} \quad \text{für } x \in D_{k\ell} = [x_{k\ell}, y_{k\ell}]$$

und erhält für alle  $x \in D_{k\ell}$  die Abschätzung

$$|T_k x - T_0 y_{k\ell}| \leq \frac{y_{k\ell} - x}{y_{k\ell} - x_{k\ell}} |T_0 x_{k\ell} - T_0 y_{k\ell}| \leq |T_0 x_{k\ell} - T_0 y_{k\ell}|.$$

Für jedes  $\ell \in \{1, \dots, 2^k - 1\}$  definiert man analog dazu

$$T_k x = \frac{x_{k\ell+1} - x}{x_{k\ell+1} - y_{k\ell}} T_0 y_{k\ell} + \frac{x - y_{k\ell}}{x_{k\ell+1} - y_{k\ell}} T_0 x_{k\ell+1} \quad \text{für } x \in L_{k\ell} = (y_{k\ell}, x_{k\ell+1})$$

und bekommt für alle  $x \in L_{k\ell}$  die Beziehung

$$|T_k x - T_0 y_{k\ell}| \leq \frac{x - y_{k\ell}}{x_{k\ell+1} - y_{k\ell}} |T_0 x_{k\ell+1} - T_0 y_{k\ell}| \leq |T_0 x_{k\ell+1} - T_0 y_{k\ell}|.$$

Außerdem gilt  $T_m x = T_k x$  für alle  $x \in [0, 1] \setminus F_k$  und jedes  $m \in \mathbb{N}$  mit  $m \geq k$ .

4. Sei  $k_0 \in \mathbb{N}$  derart gewählt, daß  $3^{-k_0} \leq \delta$  gilt sowie  $m, k \in \mathbb{N}$  mit  $m \geq k \geq k_0$  vorgegeben. Ferner sei  $x \in F_k$  fixiert. Dann existiert ein  $\ell \in \{1, \dots, 2^k\}$  mit  $x \in D_{k\ell}$ . Jetzt werden die beiden Fälle  $x \in F_m$  bzw.  $x \in F_k \setminus F_m$  untersucht:

Im Falle  $x \in F_m$  existiert ein  $p \in \{1, \dots, 2^m\}$  mit  $x \in D_{mp} \subset D_{k\ell}$ , und es gilt

$$|x_{k\ell} - y_{k\ell}| \leq 3^{-k} \leq \delta, \quad |x_{mp} - y_{mp}| \leq 3^{-k} \leq \delta, \quad |y_{k\ell} - y_{mp}| \leq 3^{-k} \leq \delta.$$

Schritt 1 liefert aufgrund der Stetigkeit von  $T_0 : C \rightarrow \mathbb{K}$  folglich

$$|T_0 x_{k\ell} - T_0 y_{k\ell}| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad |T_0 x_{mp} - T_0 y_{mp}| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad |T_0 y_{k\ell} - T_0 y_{mp}| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wegen  $x \in D_{mp} \subset D_{k\ell}$  erhält man daraus nach Schritt 3 die Abschätzungen

$$|T_k x - T_0 y_{k\ell}| \leq |T_0 x_{k\ell} - T_0 y_{k\ell}| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad |T_m x - T_0 y_{mp}| \leq |T_0 x_{mp} - T_0 y_{mp}| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

und somit auch

$$|T_k x - T_m x| \leq |T_k x - T_0 y_{k\ell}| + |T_0 y_{k\ell} - T_0 y_{mp}| + |T_0 y_{mp} - T_m x| \leq \varepsilon.$$

Im Falle  $x \in F_k \setminus F_m$  gibt es ein  $p \in \{1, \dots, 2^m - 1\}$  mit  $x \in L_{mp} \subset D_{k\ell}$ , also gilt

$$|x_{k\ell} - y_{k\ell}| \leq 3^{-k} \leq \delta, \quad |x_{mp+1} - y_{mp}| \leq 3^{-k} \leq \delta, \quad |y_{k\ell} - y_{mp}| \leq 3^{-k} \leq \delta.$$

Mit Schritt 1 gelangt man wegen der Stetigkeit von  $T_0 : C \rightarrow \mathbb{K}$  zu

$$|T_0 x_{k\ell} - T_0 y_{k\ell}| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad |T_0 x_{mp+1} - T_0 y_{mp}| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad |T_0 y_{k\ell} - T_0 y_{mp}| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Aufgrund von  $x \in L_{mp} \subset D_{k\ell}$  ergeben sich daraus nach Schritt 3 die Beziehungen

$$|T_k x - T_0 y_{k\ell}| \leq |T_0 x_{k\ell} - T_0 y_{k\ell}| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad |T_m x - T_0 y_{mp}| \leq |T_0 x_{mp+1} - T_0 y_{mp}| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

und deshalb

$$|T_k x - T_m x| \leq |T_k x - T_0 y_{k\ell}| + |T_0 y_{k\ell} - T_0 y_{mp}| + |T_0 y_{mp} - T_m x| \leq \varepsilon.$$

Da außerdem nach Konstruktion  $T_k x = T_m x$  für alle  $x \in [0, 1] \setminus F_k$  gilt, ergibt sich

$$|T_k x - T_m x| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x \in [0, 1] \text{ und } m, k \in \mathbb{N} \text{ mit } m \geq k \geq k_0.$$

Damit ist  $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset BC([0, 1]; \mathbb{K})$  eine Cauchy-Folge im vollständigen metrischen Raum  $BC([0, 1]; \mathbb{K})$  und konvergiert somit gleichmäßig gegen eine Abbildung  $T \in BC([0, 1]; \mathbb{K})$ , die auf  $[0, 1] \setminus C$  stückweise affin ist, da  $C = \bigcap_{m=0}^{\infty} F_m$  sowie desweiteren  $T|_{([0, 1] \setminus F_m)} = T_m|_{([0, 1] \setminus F_m)}$  für jedes  $m \in \mathbb{N}$  gilt.

5. Ist  $x \in C$  vorgegeben, dann gibt es eine Folge  $\{\ell_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$  mit  $\ell_k \in \{1, \dots, 2^k\}$ , so daß die Folge  $\{x_{k\ell_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C$  in  $\mathbb{R}$  gegen  $x \in C$  konvergiert. Wegen der Stetigkeit der Abbildungen  $T_0 : C \rightarrow \mathbb{K}$  und  $T : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$  liefert der Grenzprozeß  $k \rightarrow \infty$  in

$$\begin{aligned} |Tx - T_0 x| &\leq |Tx - Tx_{k\ell_k}| + |Tx_{k\ell_k} - T_k x_{k\ell_k}| + |T_k x_{k\ell_k} - T_0 x| \\ &\leq |Tx - Tx_{k\ell_k}| + \max_{y \in [0, 1]} |Ty - T_k y| + |T_0 x_{k\ell_k} - T_0 x| \end{aligned}$$

offenbar  $Tx = T_0 x$  und somit die Fortsetzungseigenschaft  $T|_C = T_0$ .

6. Sei  $k \in \mathbb{N}$  beliebig vorgegeben. Wegen Schritt 3 gilt für alle  $x \in D_{k\ell} = [x_{k\ell}, y_{k\ell}]$  mit  $\ell \in \{1, \dots, 2^k\}$  die Abschätzung

$$|T_k x| \leq \frac{y_{k\ell} - x}{y_{k\ell} - x_{k\ell}} |T_0 x_{k\ell}| + \left(1 - \frac{y_{k\ell} - x}{y_{k\ell} - x_{k\ell}}\right) |T_0 y_{k\ell}| \leq \max_{y \in C} |T_0 y|$$

sowie für jedes  $x \in L_{k\ell} = (y_{k\ell}, x_{k\ell+1})$  mit  $\ell \in \{1, \dots, 2^k - 1\}$  ebenfalls

$$|T_k x| = \frac{x_{k\ell+1} - x}{x_{k\ell+1} - y_{k\ell}} |T_0 y_{k\ell}| + \left(1 - \frac{x_{k\ell+1} - x}{x_{k\ell+1} - y_{k\ell}}\right) |T_0 x_{k\ell+1}| \leq \max_{y \in C} |T_0 y|,$$

also insgesamt  $\max_{x \in [0, 1]} |T_k x| \leq \max_{y \in C} |T_0 y|$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$ . Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von  $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset BC([0, 1]; \mathbb{K})$  gegen  $T \in BC([0, 1]; \mathbb{K})$  folgt daraus  $\max_{x \in [0, 1]} |Tx| \leq \max_{y \in C} |T_0 y|$ . Da nach Schritt 5 auch  $T|_C = T_0$  gilt, folgt schließlich die Gleichheit  $\max_{x \in [0, 1]} |Tx| = \max_{y \in C} |T_0 y|$  der Maxima.  $\square$