Vorlesung 6

Gleichgradig stetige Mengen

Gleichgradig stetige Mengen. Seien (X, ρ_X) und (Y, ρ_Y) metrische Räume.

1. Eine Teilmenge $E \subset B(X;Y)$ heißt *gleichgradig stetig in* $u \in X$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für jedes $T \in E$ und alle $v \in X$ aus $\rho_X(u, v) \leq \delta$ stets $\rho_Y(Tu, Tv) \leq \varepsilon$ folgt.

2. Man nennt $E \subset BC(X;Y)$ *gleichgradig stetig*, wenn E in jedem Punkt $u \in X$ gleichgradig stetig ist.

Abschließung gleichgradig stetiger Mengen. Sind (X, ρ_X) und (Y, ρ_Y) metrische Räume und $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset BC(X;Y)$ eine gleichgradig stetige Folge, die punktweise gegen eine Abbildung $T : X \to Y$ konvergiert, dann ist diese Abbildung stetig.

Beweis. Gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $u \in X$ ein $\delta > 0$, so daß für jedes $k \in \mathbb{N}$ und alle $v \in X$ aus $\rho_X(u, v) \leq \delta$ stets $\rho_Y(T_k u, T_k v) \leq \varepsilon$ folgt, dann kann man aufgrund der punktweisen Konvergenz der Folge $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset BC(X;Y)$ gegen die Abbildung $T : X \to Y$ den Grenzübergang $k \to \infty$ in

$$\rho_Y(Tu, Tv) \leq \rho_Y(Tu, T_k u) + \rho_Y(T_k u, T_k v) + \rho_Y(T_k v, Tv)$$

durchführen und erhält $\rho_Y(Tu, Tv) \leq \varepsilon$ für jedes $v \in X$ mit $\rho_X(u, v) \leq \delta$. □

Gleichmäßig gleichgradig stetige Mengen. 1. Sind (X, ρ_X) und (Y, ρ_Y) metrische Räume, dann heißt eine Menge $E \subset BC(X;Y)$ *gleichmäßig gleichgradig stetig*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für jedes $T \in E$ und alle $u, v \in X$ aus $\rho_X(u, v) \leq \delta$ stets $\rho_Y(Tu, Tv) \leq \varepsilon$ folgt.

2. Ist (X, ρ_X) überdies ein kompakter metrischer Raum, dann ist jede gleichgradig stetige Menge $E \subset BC(X;Y)$ auch gleichmäßig gleichgradig stetig.

Beweis. 1. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es zu jedem $u \in X$ ein $\delta(u) > 0$, so daß $\rho_Y(Tu, Tv) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für jedes $T \in E$ und alle $v \in X$ mit $\rho_X(u, v) \leq 2\delta(u)$ gilt.

2. Wegen der Kompaktheit von (X, ρ_X) kann man aus der offenen Überdeckung $\{B(u, \delta(u))\}_{u\in X}$ von X eine endliche Teilfamilie $\{B(u_1, \delta(u_1)), \ldots, B(u_k, \delta(u_k))\}$ offener Kugeln herausgreifen, die X überdeckt. Für ein beliebiges $u \in X$ wählt man ein $\ell \in \{1, \ldots, k\}$ mit $u \in B(u_\ell, \delta(u_\ell))$. Setzt man $\delta = \min\{\delta(u_1), \ldots, \delta(u_k)\}$, dann erhält man $B(u, \delta) \subset B(u_\ell, 2\delta(u_\ell))$ wegen $\delta \leq \delta(u_\ell)$. Somit folgt für jedes $v \in X$ aus $\rho_X(u, v) \leq \delta$ stets $\rho_X(u_\ell, v) \leq 2\delta(u_\ell)$. Da auch $\rho_X(u, u_\ell) \leq \delta(u_\ell)$ gilt, liefert Schritt 1

$$\rho_Y(Tu, Tv) \leq \rho_Y(Tu, Tu_\ell) + \rho_Y(Tu_\ell, Tv) \leq \varepsilon$$

für alle $v \in X$ mit $\rho_X(u, v) \leq \delta$. Da $T \in E$ und $u \in X$ beliebig gewählt wurden, ist $E \subset BC(X;Y)$ gleichmäßig gleichgradig stetig. □

Abschließung gleichmäßig gleichgradig stetiger Mengen. Ist (X, ρ_X) ein kompakter metrischer Raum, (Y, ρ_Y) ein metrischer Raum und $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset BC(X;Y)$ eine gleichmäßig gleichgradig stetige Folge, die punktweise gegen eine Abbildung $T : X \to Y$ konvergiert. Dann konvergiert die Folge $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen den gleichmäßig stetigen Grenzwert $T : X \to Y$.

Beweis. 1. Die gleichmäßig gleichgradige Stetigkeit der Folge $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset BC(X;Y)$ liefert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß $\rho_Y(T_k u, T_k v) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und alle Punkte $u, v \in X$ mit $\rho_X(u, v) \leq \delta$ gilt. Da die Folge $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset BC(X;Y)$ punktweise gegen $T : X \to Y$ konvergiert, liefert der Grenzübergang $k \to \infty$ in

$$\rho_Y(Tu, Tv) \leq \rho_Y(Tu, T_k u) + \rho_Y(T_k u, T_k v) + \rho_Y(T_k v, Tv)$$

die Beziehung $\rho_Y(Tu, Tv) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $u, v \in X$ mit $\rho_X(u, v) \leq \delta$, das heißt, die Abbildung $T : X \to Y$ ist gleichmäßig stetig.

2. Aus der Kompaktheit von (X, ρ_X) folgt auch, daß man aus der offenen Überdeckung $\{B(u, \delta)\}_{u\in X}$ von X eine endliche Teilfamilie $\{B(u_1, \delta), \dots, B(u_m, \delta)\}$ offener Kugeln auswählen kann, die X überdeckt. Die punktweise Konvergenz der Folge $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset BC(X;Y)$ gegen die stetige Abbildung $T : X \to Y$ liefert einen Index $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\rho_Y(T_k u_\ell, Tu_\ell) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$ und $\ell \in \{1, \dots, m\}$ gilt.

3. Für ein beliebiges $u \in X$ wählt man einen Index $\ell \in \{1, \dots, m\}$ mit $\rho(u, u_\ell) \leq \delta$. Nach Schritt 1 folgt daraus $\rho_Y(T_k u, T_k u_\ell) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wegen der punktweisen Konvergenz von $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset BC(X;Y)$ gegen $T : X \to Y$ liefert der Grenzprozeß $k \to \infty$ in

$$\rho_Y(Tu, Tu_\ell) \leq \rho_Y(Tu, T_k u) + \rho_Y(T_k u, T_k u_\ell) + \rho_Y(T_k u_\ell, Tu_\ell)$$

die Beziehung $\rho_Y(Tu, Tu_\ell) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Mit Schritt 1 und 2 folgt daraus

$$\rho_Y(T_k u, Tu) \leq \rho_Y(T_k u, T_k u_\ell) + \rho_Y(T_k u_\ell, Tu_\ell) + \rho_Y(Tu_\ell, Tu) \leq \varepsilon$$

für jedes $u \in X$ und alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, das heißt, $\lim_{k\to\infty} \rho(T_k, T) = 0$. $\square$

Satz von Ascoli über relativ kompakte Teilmengen. Ist (X, ρ_X) ein kompakter und (Y, ρ_Y) ein vollständiger metrischer Raum, so ist eine Teilmenge K von $BC(X;Y)$ genau dann relativ kompakt, wenn $K \subset BC(X;Y)$ gleichmäßig gleichgradig stetig und die Menge $K(u) = \{Tu \in Y : T \in K\}$ für jedes $u \in X$ relativ kompakt in Y ist.

Beweis. 1. Ist K eine relativ kompakte Teilmenge von $BC(X;Y)$, dann existiert wegen des Hausdorff-Kriteriums zu jedem $\varepsilon > 0$ ein endliches $\frac{\varepsilon}{3}$-Netz $\{T_1, \dots, T_k\} \subset K$ für K: Zu jedem $T \in K$ existiert ein $\ell \in \{1, \dots, k\}$ mit $\rho(T, T_\ell) \leq \frac{\varepsilon}{3}$, das heißt, es gilt $\rho_Y(Tu, T_\ell u) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $u \in X$. Somit ist $\{T_1 u, \dots, T_k u\} \subset K(u)$ für jedes $u \in X$ ein endliches $\frac{\varepsilon}{3}$-Netz für $K(u)$ in Y, und das Hausdorff-Kriteriums liefert wegen der Vollständigkeit von Y die relative Kompaktheit von $K(u)$ in Y für jedes $u \in X$.

Da wegen der Kompaktheit von X die endliche Familie $\{T_1, \dots, T_k\} \subset K$ aus gleichmäßig stetigen Abbildungen besteht, kann man ein $\delta > 0$ finden, so daß für alle $u, v \in X$ und jedes $\ell \in \{1, \dots, k\}$ aus $\rho_X(u, v) \leq \delta$ stets $\rho_Y(T_\ell u, T_\ell v) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ folgt. Da nach Schritt 1 zu jedem $T \in K$ ein Index $\ell \in \{1, \dots, k\}$ mit $\rho(T, T_\ell) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ existiert, folgt daraus für jedes $T \in K$ sowie alle $u, v \in X$ mit $\rho_X(u, v) \leq \delta$ die Abschätzung

$$\rho_Y(Tu, Tv) \leq \rho_Y(Tu, T_\ell u) + \rho_Y(T_\ell u, T_\ell v) + \rho_Y(T_\ell v, Tv) \leq \varepsilon,$$

also die gleichmäßig gleichgradige Stetigkeit von K.

2. Sei $K \subset BC(X; Y)$ gleichmäßig gleichgradig stetig sowie die Menge $K(u) = \{Tu \in Y : T \in K\}$ für jedes $u \in X$ relativ kompakt in Y. Da wegen der Vollständigkeit von Y auch $BC(X; Y)$ vollständig ist, ist der Nachweis der relativen Kompaktheit von K in $BC(X; Y)$ erbracht, wenn man für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Überdeckung $\{L_\varphi\}_{\varphi \in \Phi}$ von K durch Teilmengen $L_\varphi \subset K$ mit $\operatorname{diam}(L_\varphi) \leq \varepsilon$ finden kann: Zunächst wählt man $\delta > 0$ derart, so daß $\rho_Y(Tu, Tv) \leq \frac{\varepsilon}{4}$ für jedes $T \in K$ sowie alle $u, v \in X$ mit $\rho_X(u, v) \leq \delta$ gilt, und greift aus der offenen Überdeckung $\{B(u, \delta)\}_{u \in X}$ von X eine endliche Teilfamilie $\{B(u_1, \delta), \dots, B(u_m, \delta)\}$ heraus, die X überdeckt.

3. Nach Voraussetzung ist die Menge $K(u_\ell)$ für jedes $\ell \in \{1, \dots, m\}$ und damit auch deren (endliche) Vereinigung

$$E = \cup_{\ell=1}^m K(u_\ell) = \big\{Tu_\ell \in Y : T \in K,\ \ell \in \{1, \dots, m\}\big\}$$

relativ kompakt in Y. Man wählt ein endliches $\frac{\varepsilon}{4}$-Netz $\{g_1, \dots, g_k\} \subset E$ für $E \subset Y$, so daß für jedes $g \in E$ ein Index $p \in \{1, \dots, k\}$ mit $\rho_Y(g, g_p) \leq \frac{\varepsilon}{4}$ existiert.

4. Ist Φ die (endliche) Menge aller Abbildungen $\varphi : \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, k\}$, so definiert man für jedes $\varphi \in \Phi$ die Teilmenge

$$L_\varphi = \big\{T \in K : \rho_Y(Tu_\ell, g_{\varphi(\ell)}) \leq \tfrac{\varepsilon}{4} \ \text{ für jedes } \ell \in \{1, \dots, m\}\big\} \subset K.$$

Obwohl einige der Mengen $L_\varphi \subset K$ leer sein können, kann man für jedes $T \in K$ nach Schritt 3 jedem Index $\ell \in \{1, \dots, m\}$ einen Index $p \in \{1, \dots, k\}$ zuordnen, so daß $\rho_Y(Tu_\ell, g_p) \leq \frac{\varepsilon}{4}$ gilt, das heißt, die Menge K wird von der endlichen Familie $\{L_\varphi\}_{\varphi \in \Phi} \subset K$ überdeckt.

5. Um einzusehen, daß die Abschätzung $\operatorname{diam}(L_\varphi) \leq \varepsilon$ für jedes $\varphi \in \Phi$ gilt, seien die Abbildungen $T, A \in L_\varphi$ für ein beliebiges $\varphi \in \Phi$ vorgegeben. Nach Schritt 2 gibt es für jedes $v \in X$ ein $\ell \in \{1, \dots, m\}$, so daß $\rho_X(u_\ell, v) \leq \delta$ gilt, woraus sich sowohl $\rho_Y(Tu_\ell, Tv) \leq \frac{\varepsilon}{4}$ als auch $\rho_Y(Au_\ell, Av) \leq \frac{\varepsilon}{4}$ ergibt. Da nach Schritt 4 außerdem

$$\rho_Y(Tu_\ell, Au_\ell) \leq \rho_Y(Tu_\ell, g_{\varphi(\ell)}) + \rho_Y(Au_\ell, g_{\varphi(\ell)}) \leq \tfrac{\varepsilon}{2}$$

gilt, erhält man $\rho_Y(Tv, Av) \leq \rho_Y(Tv, Tu_\ell) + \rho_Y(Tu_\ell, Au_\ell) + \rho_Y(Au_\ell, Av) \leq \varepsilon$ für jedes $v \in X$ und somit $\rho(T, A) \leq \varepsilon$ für alle $T, A \in L_\varphi$ und $\varphi \in \Phi$. Dies bedeutet, daß es für die Menge K eine endliche Überdeckung $\{L_\varphi\}_{\varphi \in \Phi} \subset K$ durch Mengen gibt, welche die Beziehung $\operatorname{diam}(L_\varphi) \leq \varepsilon$ für jedes $\varphi \in \Phi$ erfüllen. $\square$