Vorlesung 7

Lineare Räume und Abbildungen

Lineare Räume. Ein *linearer Raum* über dem Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ist eine Menge V mit einer durch die beiden Abbildungen

Addition: $(u, v) \mapsto u + v$ von $V \times V$ in V,

Skalare Multiplikation: $(\alpha, u) \mapsto \alpha u$ von $\mathbb{K} \times V$ in V,

definierten Struktur. Diese Abbildungen sollen die folgenden Eigenschaften besitzen:

1.1. Für alle $u, v, w \in V$ gilt $(u + v) + w = u + (v + w)$.

1.2. Für alle $u, v \in V$ gilt $u + v = v + u$.

1.3. Es gibt einen *Nullvektor* $0 \in V$, so daß $u + 0 = u$ für alle $u \in V$ gilt.

1.4. Zu jedem $u \in V$ existiert ein $-u \in V$, so daß $u + (-u) = 0$ gilt.

2.1. Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $u \in V$ gilt $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$.

2.2. Für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und $u, v \in V$ gilt $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.

2.3. Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $u \in V$ gilt $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$.

2.4. Für alle $u \in V$ gilt $1u = u$.

Linearkombinationen. Sind $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathbb{K}$ sowie $\{u_1, \dots, u_n\} \subset V$ endliche Familien, dann bezeichnet man die Summe $\sum_{k=1}^n \alpha_k u_k \in V$ als *Linearkombination* der Vektoren aus $\{u_1, \dots, u_n\}$.

Lineare Teilräume. 1. Ist V ein linearer Raum, so versteht man unter einem *linearen Teilraum* von V eine Teilmenge V_0 von V, so daß für alle $u, v \in V_0$ sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ stets $\alpha u + \beta v \in V_0$ gilt.

2. Die Einschränkungen der Addition auf $V_0 \times V_0$ sowie der skalaren Multiplikation auf $\mathbb{K} \times V_0$ bilden jeweils in V_0 ab, das heißt, der lineare Teilraum V_0 ist selbst ein linearer Raum über $\mathbb{K}$.

Lineare Hülle. 1. Für jede Familie $\{V_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ linearer Teilräume von V ist auch deren Durchschnitt $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} V_\gamma$ ein linearer Teilraum von V.

2. Für jede Teilmenge E von V wird die *lineare Hülle* $\operatorname{lin} E$ von E als Durchschnitt sämtlicher linearer Teilräume U von V mit $E \subset U$ definiert, also als kleinster, die Menge E umfassender linearer Teilraum von V.

3. Die Menge aller Linearkombinationen (endlicher) Familien von Vektoren aus einer Teilmenge $E \subset V$ stimmt mit ihrer linearen Hülle $\operatorname{lin} E$ überein, das heißt,

$$\operatorname{lin} E = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k \in V : \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathbb{K},\ \{u_1, \dots, u_n\} \subset E,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Summen linearer Teilräume. 1. Die lineare Hülle der Vereinigung $\cup_{\gamma\in\Gamma} V_\gamma$ einer Familie $\{V_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ linearer Teilräume von V wird als deren *Summe* $\sum_{\gamma\in\Gamma} V_\gamma$ bezeichnet.

2. Diese Summe heißt *algebraisch direkt*, wenn für jeden Index $\kappa \in \Gamma$ die Bedingung $V_\kappa \cap \sum_{\gamma\in\Gamma,\, \gamma\neq\kappa} V_\gamma = \{0\}$ erfüllt ist.

3. Man nennt zwei lineare Teilraüme V_1 und V_2 von V *komplementär*, wenn sich V als algebraisch direkte Summe $V = V_1 + V_2$ darstellen läßt.

Lineare Unabhängigkeit. Eine Familie $\{u_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ von Vektoren im linearen Raum V heißt *linear unabhängig*, wenn für jede endliche Teilfamilie $\{v_1, \dots, v_n\}$ von $\{u_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ und alle $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ aus $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k = 0$ stets $\alpha_k = 0$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ folgt.

Basen. 1. Eine Familie $\{v_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset V$ von Vektoren eines linearen Raumes V heißt *Basis* von V, wenn sie linear unabhängig ist und $V = \sum_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{lin}\{v_\gamma\}$ gilt, das heißt, wenn $V = \sum_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{lin}\{v_\gamma\}$ eine algebraisch direkte Summe ist.

2. Sei V_1 ein linearer Teilraum des linearen Raums V und $\{u_1, \dots, u_m\} \subset V$ eine Familie mit $V = V_1 + \sum_{k=1}^{m} \operatorname{lin}\{u_k\}$. Dann gibt es eine Teilfamilie $\{v_1, \dots, v_n\}$ von $\{u_1, \dots, u_m\}$, so daß $V = V_1 + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{lin}\{v_k\}$ eine algebraisch direkte Summe ist.

Dimension und Codimension. 1. Besitzt der lineare Raum V eine endliche Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$, so nennt man ihn *endlichdimensional*. Dann besteht jede Basis von V aus genau n Vektoren und $\dim V = n$ wird *Dimension* des linearen Raums V genannt. Ein linearer Raum, der nicht von endlicher Dimension ist, heißt *unendlichdimensional*.

2. Ein linearer Teilraum V_1 eines linearen Raumes V besitzt *endliche Codimension*, wenn es einen endlichdimensionalen linearen Teilraum V_2 von V gibt, für den die Summe $V = V_1 + V_2$ algebraisch direkt ist. Die Dimension $\operatorname{codim} V_1 = \dim V_2$ heißt *Codimension* von V_1 in V. Existiert kein endlichdimensionaler linearer Teilraum V_2 von V, der komplementär zu V_1 in V ist, dann besitzt V_1 *unendliche Codimension*.

Dimension von Teilräumen. 1. Ist V ein endlichdimensionaler linearer Raum, so gilt $\dim V = \dim U + \operatorname{codim} U$ für jeden linearen Teilraum U von V.

2. Sind V_1 und V_2 endlichdimensionale lineare Teilräume eines linearen Raums V, dann gilt $\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$.

3. Haben die beiden linearen Teilräume V_1 und V_2 eines linearen Raums V endliche Codimension, dann gilt $\operatorname{codim}(V_1 + V_2) + \operatorname{codim}(V_1 \cap V_2) = \operatorname{codim} V_1 + \operatorname{codim} V_2$.

Lineare Abbildungen. 1. Seien V und W zwei lineare Räume über demselben Körper $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $T : V \to W$ heißt *linear*, wenn für alle Skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und alle Vektoren $u, v \in V$ stets $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T u + \beta T v$ gilt.

2. Insbesondere gilt dann $T0 = 0$ sowie $T\big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k\big) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T u_k$ für alle endlichen Familien $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathbb{K}$ und $\{u_1, \dots, u_n\} \subset V$.

Bildraum und Kern linearer Abbildungen. Sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen den linearen Räumen V und W.

1. Für jeden linearen Teilraum V_0 von V ist das Bild $T[V_0]$ ein linearer Teilraum von W. Das Bild $T[V]$ des ganzen Raumes V wird *Bildraum* von T genannt.
2. Die Abbildung T ist genau dann surjektiv, wenn $T[V] = W$ gilt.
3. Für jeden linearen Teilraum W_0 von W ist das Urbild $T^{-1}[W_0]$ ein linearer Teilraum von V. Das Urbild $T^{-1}[\{0\}]$ des Nullraums $\{0\} \subset W$ nennt man *Kern* von T.
4. Die Abbildung T ist genau dann injektiv, wenn $T^{-1}[\{0\}] = \{0\}$ gilt.
5. Sei die Familie $\{w_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset T[V]$ linear unabhängig und jedem $\gamma \in \Gamma$ ein $u_\gamma \in V$ mit $Tu_\gamma = w_\gamma$ zugeordnet. Dann ist die Familie $\{u_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset V$ linear unabhängig, und $T^{-1}[\{0\}] + \sum_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{lin}\{u_\gamma\}$ ist eine algebraisch direkte Summe.

Linearer Raum aller linearen Abbildungen. Sei $L(V;W)$ die Menge aller linearen Abbildungen zwischen den linearen Räumen V und W. Sind $T, A \in L(V;W)$ zwei lineare Abbildungen und $\alpha \in \mathbb{K}$ ein Skalar, dann werden durch die beiden Zuordnungen $u \mapsto Tu + Au$ sowie $u \mapsto \alpha Tu$ für $u \in V$ die beiden Operationen

Addition: $(T, A) \mapsto T + A$ von $L(V;W) \times L(V;W)$ in $L(V;W)$,

Skalare Multiplikation: $(\alpha, T) \mapsto \alpha T$ von $\mathbb{K} \times L(V;W)$ in $L(V;W)$,

definiert, welche die Struktur des linearen Raums $L(V;W)$ erzeugen.

Verkettung linearer Abbildungen. Seien V, W und X, Y lineare Räume.

1. Für alle $T \in L(V;W)$ und $A \in L(W;X)$ gilt $AT \in L(V;X)$.
2. Für alle $T \in L(V;W)$, $A \in L(W;X)$, $\Phi \in L(X;Y)$ gilt $\Phi(AT) = (\Phi A)T$.
3. Für alle $T, T_1 \in L(V;W)$ und $A \in L(W;X)$ gilt $A(T + T_1) = AT + AT_1$.
4. Für alle $T \in L(V;W)$ und $A, A_1 \in L(W;X)$ gilt $(A + A_1)T = AT + A_1T$.
5. Für alle $T \in L(V;W)$, $A \in L(W;X)$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt $A(\alpha T) = \alpha AT$.

Bildraum und Kern verketteter linearer Abbildungen. Seien V, W und X lineare Räume sowie $T : V \to W$ und $A : W \to X$ lineare Abbildungen.

1. Der Bildraum $(AT)[V] = A[T[V]]$ der Verkettung ist der Bildraum bezüglich A des Bildraums $T[V]$ von T.
2. Der Kern $(AT)^{-1}[\{0\}] = T^{-1}[A^{-1}[\{0\}]]$ der Verkettung ist das Urbild bezüglich T des Kerns $A^{-1}[\{0\}]$ von A.

Verkettung bijektiver linearer Abbildungen. Sind V, W, X lineare Räume sowie $T : V \leftrightarrow W$ und $A : W \leftrightarrow X$ bijektive lineare Abbildungen, dann ist die Verkettung $AT : V \leftrightarrow X$ und damit auch deren Inverse $(AT)^{-1} = T^{-1}A^{-1} : X \leftrightarrow V$ jeweils eine bijektive lineare Abbildung.

Hyperebenen und lineare Funktionale. Sei V ein linearer Raum.

1. Ein linearer Teilraum E von V mit $\operatorname{codim} E = 1$ heißt *Hyperebene* in V.

2. Jeder lineare Teilraum eines linearen Raums V, der eine Hyperebene E in V enthält, stimmt entweder mit E überein oder ist V selbst.

3. Für jede Hyperebene E in V kann man eine nichttriviale lineare Abbildung $f : V \to \mathbb{K}$ mit $E = f^{-1}[\{0\}]$ finden.

Ist $g : V \to \mathbb{K}$ eine weitere lineare Abbildung mit $E = g^{-1}[\{0\}]$, dann existiert ein Skalar $\beta \in \mathbb{K}$, $\beta \neq 0$, so daß $g = \beta f$ gilt.

Beweis. Für jede Hyperebene E in V gibt es einen Vektor $v \in V$ mit $v \notin E$ derart, daß $V = E + \operatorname{lin}\{v\}$ eine algebraisch direkte Summe ist. Daher kann jedes $u \in V$ eindeutig in der Form $u = w + \langle f, u\rangle v$ dargestellt werden, wobei $u \in V$ ein Vektor $w \in E$ sowie ein Skalar $\langle f, u\rangle \in \mathbb{K}$ zugeordnet wird.

Um einzusehen, daß durch diese Zuordnung $u \mapsto \langle f, u\rangle$ eine lineare Abbildung $f : V \to \mathbb{K}$ definiert wird, seien u_1, $u_2 \in V$ sowie α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{K}$ vorgegeben. Dann existieren Vektoren w_1, w_2 und $w \in E$ mit den Darstellungen $u_1 = w_1 + \langle f, u_1\rangle v$, $u_2 = w_2 + \langle f, u_2\rangle v$ sowie $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = w + \langle f, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2\rangle v$, woraus sich

$$w + \langle f, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2\rangle v = (\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) + \big(\alpha_1\langle f, u_1\rangle + \alpha_2\langle f, u_2\rangle\big)v$$

ergibt. Wegen $v \neq 0$ und der Eindeutigkeit der Darstellung folgt daraus schließlich die Beziehung $\langle f, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2\rangle = \alpha_1\langle f, u_1\rangle + \alpha_2\langle f, u_2\rangle$. Somit ist $f : V \to \mathbb{K}$ eine lineare Abbildung mit dem Kern $f^{-1}[\{0\}] = E$.

Ist $g : V \to \mathbb{K}$ eine weitere lineare Abbildung mit $E = g^{-1}[\{0\}]$, dann muß es wegen $v \notin E$ ein $\beta \in \mathbb{K}$, $\beta \neq 0$ mit der Eigenschaft $\langle g, v\rangle = \beta$ geben. Da außerdem auch $\langle f, v\rangle = 1$ gilt, erhält man für die lineare Abbildung $g - \beta f : V \to \mathbb{K}$ sowohl $\langle g - \beta f, w\rangle = 0$ für alle $w \in E$ als auch $\langle g - \beta f, v\rangle = 0$, das heißt, es gilt $g = \beta f$ auf dem ganzen Raum $V = E + \operatorname{lin}\{v\}$. □

4. Ist umgekehrt $f : V \to \mathbb{K}$ eine nichttriviale lineare Abbildung, dann ist ihr Kern $E = f^{-1}[\{0\}]$ eine Hyperebene in V; es gilt also $E = \big\{u \in V : \langle f, u\rangle = 0\big\}$.

Beweis. Wegen $E = f^{-1}[\{0\}]$ und $f \neq 0$ gibt es einen Vektor $v \in V$ mit $v \notin E$. Setzt man $\lambda = \langle f, v\rangle \in \mathbb{K}$, so folgt aus $v \notin E$ zunächst $\lambda \neq 0$ und somit die Beziehung $\big\langle f, u - \frac{1}{\lambda}\langle f, u\rangle v\big\rangle = 0$ für alle $u \in V$. Es gibt also für jedes $u \in V$ einen Vektor $w \in E$ mit $u = w + \frac{1}{\lambda}\langle f, u\rangle v$, woraus $V = E + \operatorname{lin}\{v\}$ folgt. Wegen $v \notin E$ ist diese Summe algebraisch direkt und E somit eine Hyperebene in V. □