Vorlesung 8

Lineare normierte Räume

Lineare normierte Räume. Unter einer *Norm* auf einem linearen Raum V über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ versteht man eine Abbildung $u \mapsto \|u\|$ von V nach $\mathbb{R}$, die jedem Vektor $u \in V$ seine Länge $\|u\| \in \mathbb{R}$ zuordnet und für die folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. Für jedes $u \in V$ gilt $\|u\| \geq 0$ sowie genau dann $\|u\| = 0$, wenn $u = 0$.
2. Für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und $u \in V$ gilt $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$.
3. Für alle $u, v \in V$ gilt $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Ist auf einem linearen Raum V eine Norm $\|\ \ \|$ definiert, so nennt man $(V, \|\ \ \|)$ einen *linearen normierten Raum*.

Metrisierung linearer normierter Räume. Für jede Norm $u \mapsto \|u\|$ auf einem linearen Raum V wird durch $\rho(u, v) = \|u - v\|$ eine Metrik $\rho : V \times V \to \mathbb{R}$ auf V definiert, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. Für alle $u, v, w \in V$ gilt $\rho(u + w, v + w) = \rho(u, v)$.
2. Für jedes $\alpha \in \mathbb{K}$ und alle $u, v \in V$ gilt $\rho(\alpha u, \alpha v) = |\alpha|\rho(u, v)$.

Ist umgekehrt V ein linearer Raum mit einer Metrik $\rho : V \times V \to \mathbb{R}$, welche diese Eigenschaften hat, dann wird durch $u \mapsto \|u\| = \rho(u, 0)$ eine Norm auf V definiert.

Übertragung der Eigenschaften von linearen und metrischen Räumen. In linearen normierten Räumen $(V, \|\ \ \|)$ gelten alle Eigenschaften, die in metrischen und linearen Räumen gültig sind:

1. Die Normabbildung $u \mapsto \|u\|$ ist Lipschitz-stetig von V nach $\mathbb{R}$, das heißt, für alle $u, v \in V$ gilt $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$.

Beweis. Für alle $u, v \in V$ gilt wegen der Dreiecksungleichung $\|u\| \leq \|u - v\| + \|v\|$ und $\|v\| \leq \|u - v\| + \|u\|$, also $\|u\| - \|v\| \leq \|u - v\|$ sowie $\|v\| - \|u\| \leq \|u - v\|$. □

2. Die Konvergenz einer Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ gegen einen Grenzwert $u \in V$ ist gleichbedeutend mit $\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\| = 0$.
3. Ein vollständiger linearer normierter Raum wird *Banach-Raum* genannt.
4. Die Addition $(u, v) \mapsto u + v$ von $V \times V$ nach V ist stetig.

Beweis. Sind $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ in V konvergente Folgen mit den Grenzwerten $u \in V$ bzw. $v \in V$, dann folgt aus $\|(u_k + v_k) - (u + v)\| \leq \|u_k - u\| + \|v_k - v\|$ stets $\lim_{k\to\infty} \|(u_k + v_k) - (u + v)\| = 0$. □

5. Die skalare Multiplikation $(\alpha, v) \mapsto \alpha u$ von $\mathbb{K} \times V$ nach V ist stetig.

Beweis. Konvergiert die Folge $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ in $\mathbb{K}$ gegen $\alpha \in \mathbb{K}$ und $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ in V gegen $u \in V$, dann folgt aus $\|\alpha_k u_k - \alpha u\| \leq |\alpha_k|\|u_k - u\| + |\alpha_k - \alpha|\|u\|$ stets $\lim_{k\to\infty} \|\alpha_k u_k - \alpha u\| = 0$. □

Lineare Teilräume linearer normierter Räume. Sei $(V, \|\ \ \|)$ ein linearer normierter Raum und V_0 ein linearer Teilraum von V.

1. Durch die Einschränkung der Normabbildung $u \mapsto \|u\|$ von V auf V_0 wird eine Norm auf V_0 induziert und somit der lineare normierte Teilraum $(V_0, \|\ \ \|)$ definiert.

2. Die Abschließung $\operatorname{cl} V_0$ in $(V, \|\ \ \|)$ ist ebenfalls ein linearer Teilraum von V.

Beweis. Seien $u, v \in \operatorname{cl} V_0$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es Folgen $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V_0$ und $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V_0$ mit $\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\| = 0$ und $\lim_{k\to\infty} \|v_k - v\| = 0$. Da die Abschätzung

$$\|(\alpha u_k + \beta v_k) - (\alpha u + \beta v)\| \le |\alpha| \|u_k - u\| + |\beta| \|v_k - v\|$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt, konvergiert die Folge $\{\alpha u_k + \beta v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V_0$ in V gegen den Grenzwert $\alpha u + \beta v \in \operatorname{cl} V_0$. □

3. Ist $(V, \|\ \ \|)$ ein Banach-Raum und V_0 ein abgeschlossener linearer Teilraum von V, dann ist auch $(V_0, \|\ \ \|)$ ein Banach-Raum.

Konvergente Reihen. Sei $(V, \|\ \ \|)$ ein linearer normierter Raum.

1. Die Folge $\{\sum_{\ell=1}^{k} u_\ell\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ der k-ten Partialsummen $\sum_{\ell=1}^{k} u_\ell \in V$ wird *Reihe* mit den Gliedern der Folge $\{u_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset V$ genannt.

2. Konvergiert die Reihe $\{\sum_{\ell=1}^{k} u_\ell\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ gegen einen Grenzwert in V, so wird dieser als *Summe* $\sum_{\ell=1}^{\infty} u_\ell \in V$ der konvergenten Reihe bezeichnet.

Konvergenzkriterium von Cauchy. Sei $(V, \|\ \ \|)$ ein linearer normierter Raum.

1. Konvergiert die Reihe $\{\sum_{\ell=1}^{k} u_\ell\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ in V, so ist diese Reihe eine Cauchy-Folge in V, das heißt, es gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß die Ungleichung

$$\left\|\sum_{\ell=k+1}^{k+m} u_\ell\right\| = \left\|\sum_{\ell=1}^{k+m} u_\ell - \sum_{\ell=1}^{k} u_\ell\right\| \le \varepsilon$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \ge k_0$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt.

2. Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt und $(V, \|\ \ \|)$ ein Banach-Raum, das heißt, ist die Reihe $\{\sum_{\ell=1}^{k} u_\ell\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ eine Cauchy-Folge im vollständigen linearen normierten Raum $(V, \|\ \ \|)$, dann konvergiert die Reihe in V.

Absolut konvergente Reihen. Sei $(V, \|\ \ \|)$ ein Banach-Raum.

1. Eine Reihe $\{\sum_{\ell=1}^{k} u_\ell\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ mit den Gliedern der Folge $\{u_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset V$ heißt *absolut konvergent* in V, wenn die Reihe $\{\sum_{\ell=1}^{k} \|u_\ell\|\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert.

2. Konvergiert die Reihe $\{\sum_{\ell=1}^{k} u_\ell\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ absolut in V, dann konvergiert die Reihe $\{\sum_{\ell=1}^{k} u_\ell\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ in V, und für deren Summe gilt die Normabschätzung

$$\left\|\sum_{\ell=1}^{\infty} u_\ell\right\| \le \sum_{\ell=1}^{\infty} \|u_\ell\|.$$

Beweis. Wegen der absoluten Konvergenz der Reihe $\{\sum_{\ell=1}^{k} u_\ell\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ in V konvergiert die Reihe $\{\sum_{\ell=1}^{k} \|u_\ell\|\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ gegen $\sum_{\ell=1}^{\infty} \|u_\ell\| \in \mathbb{R}$. Somit folgt nach dem Cauchy-Kriterium für Reihen in $\mathbb{R}$ für jedes $\varepsilon > 0$ die Existenz eines $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß die Ungleichung

$$\sum_{\ell=k+1}^{k+m} \|u_\ell\| = \sum_{\ell=1}^{k+m} \|u_\ell\| - \sum_{\ell=1}^{k} \|u_\ell\| \le \varepsilon$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \ge k_0$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt, woraus sich

$$\Big\|\sum_{\ell=1}^{k+m} u_\ell - \sum_{\ell=1}^{k} u_\ell\Big\| = \Big\|\sum_{\ell=k+1}^{k+m} u_\ell\Big\| \le \sum_{\ell=k+1}^{k+m} \|u_\ell\| \le \varepsilon$$

ergibt. Da $(V, \|\ \|)$ ein Banach-Raum ist, konvergiert die Reihe $\{\sum_{\ell=1}^{k} u_\ell\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ in V nach dem Cauchy-Kriterium für Reihen in V gegen die Summe $\sum_{\ell=1}^{\infty} u_\ell \in V$.

Aufgrund der Stetigkeit der Norm kann man in der Beziehung

$$\Big\|\sum_{\ell=1}^{k} u_\ell\Big\| \le \sum_{\ell=1}^{k} \|u_\ell\| \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

den Grenzübergang $k \to \infty$ durchführen und erhält $\|\sum_{\ell=1}^{\infty} u_\ell\| \le \sum_{\ell=1}^{\infty} \|u_\ell\|$. □

Raum der zur *p*-ten Potenz summierbaren Zahlenfolgen. Sei $p \in \mathbb{R}$, $p \ge 1$.

1. Man bildet die Menge ℓ^p derjenigen Zahlenfolgen $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$, für welche die Reihe $\{\sum_{\ell=1}^{k} |x_\ell|^p\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert, also die Summe $\sum_{\ell=1}^{\infty} |x_\ell|^p$ endlich ist.

2. Definiert man die Addition zweier Zahlenfolgen $u, v \in \ell^p$ sowie die Multiplikation eines Skalars $\alpha \in \mathbb{K}$ mit einer Zahlenfolge $u \in \ell^p$ mit Hilfe der ensprechenden Operationen bezüglich jedes Folgegliedes in $\mathbb{K}$, dann ist $(\ell^p, \|\ \|_p)$ ein linearer normierter Raum, wenn die Norm von $u \in \ell^p$ durch $\|u\|_p^p = \sum_{\ell=1}^{\infty} |x_\ell|^p$ erklärt wird.

Beweis. 1. Seien eine Folge $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ sowie $\alpha \in \mathbb{K}$ vorgegeben. Offenbar gilt $\|u\|_p \ge 0$ und $\|\alpha u\|_p = |\alpha|\|u\|_p$ sowie $\|u\|_p = 0$ genau dann, wenn $u = 0$ ist.

2. Sind $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gegeben sowie $v = \{y_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^q$ eine weitere Folge, dann liefert die für alle $a, b \ge 0$ geltende Young-Ungleichung $ab \le \frac{1}{p}\, a^p + \frac{1}{q}\, b^q$ im Falle $\|u\|_p > 0$ und $\|v\|_q > 0$ für $a = \frac{1}{\|u\|_p}|x_\ell|$ und $b = \frac{1}{\|v\|_q}|y_\ell|$ die Abschätzung

$$\frac{|x_\ell y_\ell|}{\|u\|_p \|v\|_q} \le \frac{|x_\ell|^p}{p\|u\|_p^p} + \frac{|y_\ell|^q}{q\|v\|_q^q} \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}.$$

Somit folgt $uv \in \ell^1$ aus $u \in \ell^p$ und $v \in \ell^q$. Durch Summation über $\ell \in \mathbb{N}$ erhält man

$$\frac{\sum_{\ell=1}^{\infty} |x_\ell y_\ell|}{\|u\|_p \|v\|_q} \le \frac{\sum_{\ell=1}^{\infty} |x_\ell|^p}{p\|u\|_p^p} + \frac{\sum_{\ell=1}^{\infty} |y_\ell|^q}{q\|v\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

und somit die Hölder-Ungleichung $\|uv\|_1 \le \|u\|_p \|v\|_q$, die auch im Falle $\|u\|_p = 0$ oder $\|v\|_q = 0$ richtig ist.

3. Seien zwei Folgen $u = \{x_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ und $v = \{y_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ gegeben. Im Falle $p = 1$ ergibt sich aus der Dreiecksungleichung $|x_\ell + y_\ell| \le |x_\ell| + |y_\ell|$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ auch $u + v \in \ell^1$ sowie $\|u + v\|_1 \le \|u\|_1 + \|v\|_1$ nach Summation über $\ell \in \mathbb{N}$.

Im Falle $p \in (1, \infty)$ folgt zunächst $u + v \in \ell^p$ durch Summation von

$$|x_\ell + y_\ell|^p \le (|x_\ell| + |y_\ell|)^p \le 2^{p-1}(|x_\ell|^p + |y_\ell|^p) \quad \text{über alle } \ell \in \mathbb{N}.$$

Hat $q \in (1, \infty)$ die Eigenschaft $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dann ergibt sich mit Hilfe der Ungleichung

$$|x_\ell + y_\ell|^p \le |x_\ell|\,|x_\ell + y_\ell|^{p-1} + |y_\ell|\,|x_\ell + y_\ell|^{p-1} \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}$$

und der Hölder-Ungleichung aus $u, v, u + v \in \ell^p$ und $q(p-1) = p$ auch im Falle $p \in (1, \infty)$ die Ungleichung

$$\|u + v\|_p^p \le \sum_{\ell=1}^\infty \big(|x_\ell|\,|x_\ell + y_\ell|^{p-1} + |y_\ell|\,|x_\ell + y_\ell|^{p-1}\big) \le \big(\|u\|_p + \|v\|_p\big)\|u + v\|_p^{p-1}$$

und somit die Dreiecksungleichung $\|u + v\|_p \le \|u\|_p + \|v\|_p$. $\square$