Vorlesung 9

Lineare stetige Abbildungen

Stetigkeitskriterium. Seien $(V, \| \ \|_V)$ und $(W, \| \ \|_W)$ lineare normierte Räume über demselben Körper $\mathbb{K}$. Eine lineare Abbildung $T : V \to W$ ist genau dann stetig, wenn es eine reelle Konstante $c > 0$ gibt, so daß

$$\|Tu\|_W \leq c\|u\|_V \quad \text{für alle } u \in V \text{ gilt.}$$

Beweis. 1. Sei $c > 0$ eine reelle Konstante, so daß $\|Tu\|_W \leq c\|u\|_V$ für alle $u \in V$ gilt. Offenbar ist dann $T : V \to W$ Lipschitz-stetig, denn man erhält

$$\|Tu - Tv\|_W = \|T(u - v)\|_W \leq c\|u - v\|_V \quad \text{für alle } u, v \in V.$$

2. Ist $T : V \to W$ linear und stetig im Nullpunkt $0 \in V$, dann exisitiert eine in V abgeschlossene Kugel $K = \{u \in V : \|u\|_V \leq \delta\}$ mit $\delta > 0$, so daß das Bild $T[K]$ in der in W abgeschlossenen Kugel $F = \{w \in W : \|w\|_W \leq 1\}$ enthalten ist.

Im Falle $u \in V$, $u \neq 0$ betrachtet man $v = \frac{\delta}{\|u\|_V} u \in V$ und erhält $\|Tv\|_W \leq 1$ wegen $\|v\|_V \leq \delta$. Da auch $Tu = \frac{1}{\delta}\|u\|_V Tv \in W$ gilt, ergibt sich die Abschätzung

$$\|Tu\|_W = \tfrac{1}{\delta}\|u\|_V \|Tv\|_W \leq \tfrac{1}{\delta}\|u\|_V \quad \text{für alle } u \in V, u \neq 0,$$

die offenbar auch im Falle $u = 0$ gültig ist, da dann auch $Tu = 0$ gilt. □

Äquivalente Normen. Zwei Normen $\| \ \|_1$ und $\| \ \|_2$ auf einem linearen Raum V nennt man *äquivalent*, wenn die identische Abbildung von $(V, \| \ \|_1)$ auf $(V, \| \ \|_2)$ ein Homöomorphismus ist. Das ist genau dann der Fall, wenn zwei reelle Konstanten $c_1 > 0$ und $c_2 > 0$ existieren, so daß

$$\|u\|_1 \leq c_1\|u\|_2 \quad \text{sowie} \quad \|u\|_2 \leq c_2\|u\|_1 \quad \text{für alle } u \in V \text{ gelten.}$$

Norm linearer stetiger Abbildungen. Seien $(V, \| \ \|_V)$ und $(W, \| \ \|_W)$ zwei lineare normierte Räume über demselben Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

1. Für jede lineare stetige Abbildung $T : V \to W$ wird durch

$$\|T\| = \inf\big\{c \geq 0 : \|Tu\|_W \leq c\|u\|_V \text{ für alle } u \in V\big\}$$

wegen des Stetigkeitskriteriums eine reelle Zahl $\|T\| \geq 0$ korrekt definiert.

2. Aufgrund dieser Konstruktion als Infimum gilt einerseits

$$\|Tu\|_W \leq \|T\|\|u\|_V \quad \text{für jedes } u \in V,$$

und andererseits existiert im Falle $V \neq \{0\}$ für jedes $\varepsilon > 0$ stets ein $v \in V$, $v \neq 0$ mit

$$(\|T\| - \varepsilon)\|v\|_V < \|Tv\|_W.$$

3. Es gilt $\|T\| = \sup\big\{\|Tu\|_W : u \in V,\ \|u\|_V \leq 1\big\}$.

Beweis. Im trivialen Falle $V = \{0\}$ gilt $Tu = 0$ für alle $u \in V$ und damit $\|T\| = 0$.

Im nichttrivialen Fall $V \neq \{0\}$ erhält man einerseits $\|Tu\|_W \leq \|T\|\|u\|_V \leq \|T\|$ für alle $u \in V$ mit $\|u\|_V \leq 1$ und somit

$$\sup\left\{\|Tu\|_W : u \in V,\ \|u\|_V \leq 1\right\} \leq \|T\|.$$

Andererseits existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $v \in V$ mit $v \neq 0$ und der Eigenschaft $(\|T\| - \varepsilon)\|v\|_V < \|Tv\|_W$. Für $u = \frac{v}{\|v\|_V} \in V$ folgt wegen $\|u\|_V = 1$ die Abschätzung

$$\sup\left\{\|Tu\|_W : u \in V,\ \|u\|_V \leq 1\right\} \geq \|Tu\|_W \geq \frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V} > \|T\| - \varepsilon,$$

also $\sup\left\{\|Tu\|_W : u \in V,\ \|u\|_V \leq 1\right\} \geq \|T\|$ wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$. □

4. Im Falle $V \neq \{0\}$ gilt stets $\|T\| = \sup\left\{\|Tu\|_W : u \in V,\ \|u\|_V = 1\right\}$.

Beweis. Da $V \neq \{0\}$ nichttrivial ist, erhält man durch die Zerlegung der Kugel

$$\left\{u \in V : \|u\|_V \leq 1\right\} = \cup_{r\in[0,1]}\left\{u \in V : \|u\|_V = r\right\}$$

in nichtleere Sphären vom Radius $r \in [0, 1]$ die Beziehung

$$\begin{aligned}
\sup\left\{\|Tu\|_W : u \in V,\ \|u\|_V \leq 1\right\} &= \sup_{r\in[0,1]} \sup\left\{\|Tu\|_W : u \in V,\ \|u\|_V = r\right\} \\
&= \sup_{r\in[0,1]} \sup\left\{\|T(rv)\|_W : v \in V,\ \|v\|_V = 1\right\} \\
&= \sup_{r\in[0,1]} r \sup\left\{\|Tv\|_W : v \in V,\ \|v\|_V = 1\right\}
\end{aligned}$$

und somit $\|T\| = \sup\left\{\|Tv\|_W : v \in V,\ \|v\|_V = 1\right\}$. □

Stetige Projektoren. Seien $(V, \|\ \ \|)$ ein linearer normierter Raum und V_1, V_2 zwei lineare Teilräume von V, so daß ihre Summe $V = V_1 + V_2$ algebraisch direkt ist.

1. Da jedes $u \in V$ stets genau eine Darstellung $u = P_1u + P_2u$ mit $P_1u \in V_1$ und $P_2u \in V_2$ besitzt, werden durch die Zuordnungen $u \mapsto P_1u$ bzw. $u \mapsto P_2u$ zwei lineare Abbildungen $P_1, P_2 : V \to V$ definiert, die man *Projektoren* von V auf V_1 bzw. von V auf V_2 nennt.

2. Die zur bijektiven linearen Abbildung $u \mapsto (P_1u, P_2u)$ von V auf $V_1 \times V_2$ inverse bijektive Abbildung $(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$ ist genau dann ein (linearer) Homöomorphismus von $V_1 \times V_2$ auf V, wenn beide Projektoren $P_1, P_2 : V \to V$ (lineare) stetige Abbildungen sind.

3. In diesem Falle heißt die Summe $V = V_1 + V_2$ *topologisch direkt*. Jeder der beiden *topologisch komplementären* (abgeschlossenen) linearen Teilräume V_1 und V_2 von V wird als *topologisch direkter Summand* von V bezeichnet.

Abgeschlossene Hyperebenen und lineare stetige Funktionale. Seien $(V, \| \ \|)$ ein linearer normierter Raum über $\mathbb{K}$, E eine Hyperebene in V und $f : V \to \mathbb{K}$ eine nichttriviale lineare Abbildung mit $E = f^{-1}[\{0\}]$.

1. Die Hyperebene E ist genau dann ein abgeschlossener linearer Teilraum von V, wenn die lineare Abbildung $f : V \to \mathbb{K}$ stetig ist.

2. Ist die Hyperebene E ein abgeschlossener linearer Teilraum von V, dann ist $V = E + \operatorname{lin}\{v\}$ für jedes $v \in V$, $v \notin E$ eine topologisch direkte Summe.

3. Die Hyperebene E ist entweder ein abgeschlossener oder ein dichter linearer Teilraum von V.

Beweis. 1. Für jede lineare stetige Abbildung $f : V \to \mathbb{K}$ ist der Kern $E = f^{-1}[\{0\}]$ ein in V abgeschlossener linearer Teilraum.

Sei umgekehrt die Hyperebene E ein abgeschlossener linearer Teilraum von V und $v \in V$, $v \notin E$ so gewählt, daß $\langle f, v\rangle = 1$ gilt. Da E in V abgeschlossen ist, muß auch der parallel verschobene (affine) Teilraum $\{v + w \in V : w \in E\}$ in V abgeschlossen sein. Wegen $\langle f, v\rangle = 1$ gilt $0 \notin \{v+w \in V : w \in E\}$. Somit gibt es eine abgeschlossene Kugel $F = \{u \in V : \|u\| \leq \delta\}$ um den Nullpunkt mit dem Radius $\delta > 0$, so daß $F \cap \{v + w \in V : w \in E\} = \varnothing$ gilt.

Da für jedes $u \in V$ aus $\langle f, u\rangle = 1$ stets $\langle f, u - v\rangle = 0$ und somit $u - v \in E$ folgt, müssen für alle $u \in V$ mit $\|u\| \leq \delta$ aus $\langle f, u\rangle = \lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| > 1$ stets die Beziehungen $\frac{u}{\lambda} \in \{v + w \in V : w \in E\}$ und $\left\|\frac{u}{\lambda}\right\| < \|u\| \leq \delta$ folgen. Daraus ergibt sich aber wegen $F \cap \{v + w \in V : w \in E\} = \varnothing$ die Abschätzung $|\langle f, u\rangle| \leq 1$ für alle $u \in V$ mit $\|u\| \leq \delta$, das heißt, $|\langle f, u\rangle| \leq \frac{1}{\delta}\|u\|$ für alle $u \in V$. Damit ist $f : V \to \mathbb{K}$ eine lineare stetige Abbildung.

2. Wird $v_1 \in V$, $v_1 \notin E$ beliebig fixiert, dann existiert eine lineare Abbildung $f_1 : V \to \mathbb{K}$ mit $E = f_1^{-1}[\{0\}]$, so daß $V = E + \operatorname{lin}\{v_1\}$ eine algebraisch direkte Summe ist. Da die Hyperebene E ein abgeschlossener linearer Teilraum von V ist, muß $f_1 : V \to \mathbb{K}$ eine lineare stetige Abbildung sein.

Damit ist der durch die Zuordnung $u \mapsto \langle f_1, u\rangle v_1$ definierte Projektor $P_1 : V \to V$ von V auf $\operatorname{lin}\{v_1\}$ und somit der durch die Zuordnung $u \mapsto u - \langle f_1, u\rangle v_1$ definierte Projektor $P_2 : V \to V$ von V auf E jeweils linear und stetig. Daraus folgt, daß die Summe $V = E + \operatorname{lin}\{v_1\}$ topologisch direkt ist.

3. Da die Abschließung $\operatorname{cl} E$ ein die Hyperebene E umfassender linearer Teilraum von V ist, stimmt $\operatorname{cl} E$ entweder mit E oder mit V überein. $\square$