Übungsaufgaben 10

Extremwertprobleme

Aufgabe 1. Seien eine reelle Konstante $a > 0$ und die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2a^2(x_1^2 - x_2^2) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \text{ gegeben.}$$

1. Man bestimme alle *kritischen Punkte* von f, das heißt, alle Punkte $x \in \mathbb{R}^2$, welche die notwendige Bedingung $Df(x) = 0$ eines Extrempunktes von f erfüllen!

2. Welcher dieser kritischen Punkte $x \in \mathbb{R}^2$ ist ein lokaler Maximumpunkt, ein lokaler Minimumpunkt bzw. ein Sattelpunkt von f? ⑥

Aufgabe 2. Man finde jene Punkte $x \in K_1$ und $y \in K_2$ auf den beiden Kreislinien

$$K_1 = \{z \in \mathbb{R}^3 \mid z_1^2 + z_2^2 = 4, z_3 = 0\},$$
$$K_2 = \{z \in \mathbb{R}^3 \mid (z_1 - 3)^2 + z_3^2 = 4, z_2 = 0\},$$

welche den kleinsten bzw. größten Abstand $\|x - y\|$ voneinander haben! ⑧

Aufgabe 3. Sei $a \in \mathbb{R}$ eine vorgegebene positive Kantenlänge. Unter allen Quadern mit positiven Kantenlängen $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ und gegebenem Rauminhalt $R = a^3$ finde man denjenigen, welcher den kleinsten Oberflächeninhalt besitzt! ⑥