

Übungsaufgaben 11

Mehrdimensionale Integration

Aufgabe 1. Sei eine lokale Parametrisierung (Y, Ψ) des einschaligen Hyperboloids $H = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\}$ durch

$$\Psi(y) = \begin{pmatrix} \cos y_1 \\ \sin y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} -\sin y_1 \\ \cos y_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } y \in Y =]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \text{ gegeben.}$$

Man bestimme den Flächeninhalt der Teilmenge $H(h) = \{x \in H \mid |x_3| < h\}$ des Hyperboloids, wenn $h > 0$ beliebig vorgegeben wird! ⑥

Aufgabe 2. Sei der Reifen $K = \{\Psi(\rho, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3 \mid \rho \in [0, r], \varphi, \theta \in [0, 2\pi]\}$ mit dem Radius $a > 0$ des Leitkreises und dem Radius $r < a$ des Querschnittskreises durch

$$\Psi(\rho, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} (a + \rho \cos \theta) \cos \varphi \\ (a + \rho \cos \theta) \sin \varphi \\ \rho \sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{für } \rho \in [0, r] \text{ und } \varphi, \theta \in [0, 2\pi] \text{ gegeben.}$$

Man berechne die kinetische Energie $E(v) = \frac{1}{2}(Tv|v)$ der Rotation des Reifens K um die Drehachse $v \in \mathbb{R}^3$ mit dem Betrag $\|v\|$ der Drehgeschwindigkeit, wobei die symmetrische Trägheitsmatrix $T \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ des Reifens K durch

$$T = \begin{pmatrix} \int_K (\|x\|^2 - x_1^2) dx & -\int_K x_1 x_2 dx & -\int_K x_1 x_3 dx \\ -\int_K x_2 x_1 dx & \int_K (\|x\|^2 - x_2^2) dx & -\int_K x_2 x_3 dx \\ -\int_K x_3 x_1 dx & -\int_K x_3 x_2 dx & \int_K (\|x\|^2 - x_3^2) dx \end{pmatrix}$$

definiert wird! ⑧

Aufgabe 3. Sei ein Winkel $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ beliebig gegeben sowie die Parametrisierung (Ψ, \mathbb{R}) der Spirale $M = \Psi[\mathbb{R}] \subset \mathbb{R}^3$ durch

$$\Psi(y) = \frac{1}{\cosh(y \cot \alpha)} \begin{pmatrix} \cos y \\ \sin y \\ \sinh(y \cot \alpha) \end{pmatrix} \quad \text{für } y \in \mathbb{R} \text{ definiert.}$$

1. Man zeige, daß M eine Kurve auf der Kugel $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|^2 = 1\}$ ist!
2. Man berechne die Länge $L = \int_{-\infty}^{\infty} \|D\Psi(y)\| dy$ der Spirale M ! ⑥