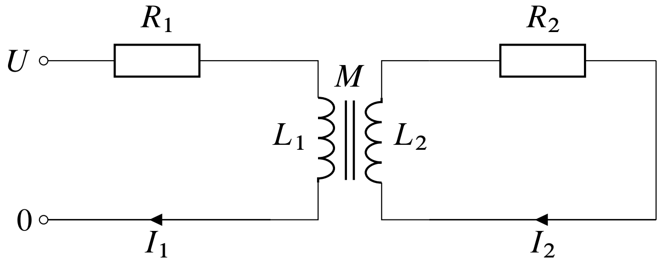
Übungsaufgaben 12

Anfangswertprobleme erster Ordnung

Aufgabe 1. In einem Wechselstromtransformator seien Spulen mit den Induktivitäten $L_1 = 7\,\mathrm{H}$, $L_2 = 28\,\mathrm{H}$, den Widerständen $R_1 = 60\,\Omega$, $R_2 = 240\,\Omega$ und der gegenseitigen Induktivität $M = 6\,\mathrm{H}$ umeinandergewickelt. In den Spulen fließen Ströme, es wirken eingeprägte Spannungen sowie die von der Selbstinduktion hervorgerufenen und die von der Gegeninduktivität erzeugten Spannungen.



Gemäß des Ohmschen Gesetzes führt dies auf das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} DI_1(t) \\ DI_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(t) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} I_1(0) \\ I_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man berechne die Ströme $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ für den Fall, daß eine reine Wechselspannung $U(t) = U_0 \sin \omega t$ mit $U_0 = 6800\,\mathrm{V}$ und $\omega = 8\,\mathrm{Hz}$ an der ersten Spule anliegt! ⑧

Aufgabe 2. Seien $g, p \in \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ vorgegebene Konstanten mit $a < b$.

1. Man berechne für jeden Parameter $\delta \in \mathbb{R}$ die stetig differenzierbare Lösung $u_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$Du_\delta(t) = \delta u_\delta(t) + gt + p \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \quad u_\delta(0) = 0,$$

wobei die beiden Fälle $\delta = 0$ und $\delta \neq 0$ unterschieden werden sollen!

2. Man zeige mit Hilfe der Exponentialreihe, daß die Beziehung

$$\lim_{\delta \to 0} \max_{t \in [a,b]} |u_\delta(t) - u_0(t)| = 0$$

der gleichmäßigen Konvergenz von (u_δ) gegen u_0 auf dem Intervall $[a, b]$ gilt! ⑥

Aufgabe 3. Man berechne die Lösung $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ des Anfangswertproblems

$$Dv(t) = Av(t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \quad v(0) = x_0,$$

wobei die Matrix $A \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ und der Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^3$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben sind! ⑥